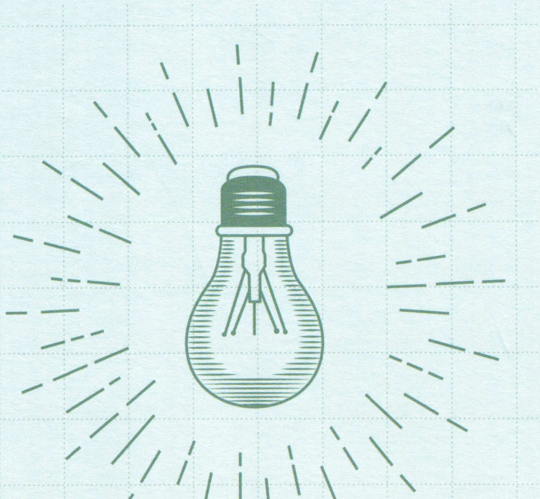
小猿书社

傅雪平 / 编著

满分之路

搞定高考物理压轴题

攻克高考物理压轴题，这一本就够了



高中物理

PHYSICS

天津出版传媒集团
天津人民出版社

目录

第一章 力学综合篇

第一讲 基本运动之直线运动 ………………………………… 1

第二讲 基本运动之平抛运动 ………………………………… 11

第三讲 基本运动之圆周运动 ………………………………… 21

第四讲 力学经典之碰撞类问题 ……………………………… 31

第五讲 力学经典之弹簧类问题 ……………………………… 43

第六讲 力学经典之板块类问题 ……………………………… 53

第七讲 力学经典之传送带问题 ……………………………… 65

第二章 电学综合篇

第八讲 带电粒子在电场中的运动 …………………………… 75

第九讲 带电粒子在磁场中的运动 …………………………… 85

第十讲 带电粒子在电磁场中的运动 ………………………… 97

第十一讲　带电粒子在复合场中的运动 …………………………… 109

第十二讲　带电粒子运动对接高新科技 …………………………… 121

第十三讲　“发电类”模型问题 ………………………………………… 133

第十四讲　“电动类”模型问题 ………………………………………… 143

第十五讲　“双电源”电路模型问题 ………………………………… 157

第十六讲　电磁感应现象对接高新科技 …………………………… 167

答案与解析目录

第一章　力学综合篇

第一讲　基本运动之直线运动 …………………………………… 179

第二讲　基本运动之平抛运动 …………………………………… 181

第三讲　基本运动之圆周运动 …………………………………… 183

第四讲　力学经典之碰撞类问题 ………………………………… 186

第五讲　力学经典之弹簧类问题 ………………………………… 189

第六讲　力学经典之板块类问题 ………………………………… 192

第七讲　力学经典之传送带问题 ………………………………… 196

第二章　电学综合篇

第八讲　带电粒子在电场中的运动 ……………………………… 199

第九讲　带电粒子在磁场中的运动 ……………………………… 202

第十讲　带电粒子在电磁场中的运动 …………………………… 207

第十一讲　带电粒子在复合场中的运动 …………………… 210

第十二讲　带电粒子运动对接高新科技 …………………… 214

第十三讲　“发电类”模型问题 ……………………………… 218

第十四讲　“电动类”模型问题 ……………………………… 220

第十五讲　“双电源”电路模型问题 ………………………… 222

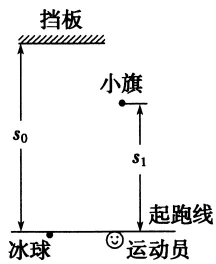
第十六讲　电磁感应现象对接高新科技 …………………… 224

第一章　力学综合篇

第一讲　基本运动之直线运动

典例剖析

【例1】(2017·高考全国卷Ⅱ)为提高冰球运动员的加速能力,教练员在冰面上与起跑线距离 s_0 和 $s_1(s_1<s_0)$处分别放置一个挡板和一面小旗,如图所示.训练时,让运动员和冰球都位于起跑线上,教练员将冰球以速度 v_0 击出,使冰球在冰面上沿垂直于起跑线的方向滑向挡板;冰球被击出的同时,运动员垂直于起跑线从静止出发滑向小旗.训练要求当冰球到达挡板时,运动员至少到达小旗处.假定运动员在滑行过程中做匀加速运动,冰球到达挡板时的速度为 v_1,重力加速度大小为 g.求:



(1)冰球与冰面之间的动摩擦因数;

(2)满足训练要求的运动员的最小加速度.

●解析

(1)设冰球的质量为 m,冰球与冰面之间的动摩擦因数为 μ,冰球运动的加速度大小为 a.

解法1:应用牛顿运动定律求解

冰球做匀减速运动,由运动学规律可得 $v_1^2-v_0^2=-2as_0$

根据牛顿第二定律可得 $\mu mg=ma$

解得 $\mu=\dfrac{v_0^2-v_1^2}{2gs_0}$.

●解析

解法 2：应用动能定理求解

冰球做匀减速运动，由动能定理得$-\mu mgs_0=\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_0^2$

解得 $\mu=\frac{v_0^2-v_1^2}{2gs_0}$.

(2)冰球到达挡板时，满足训练要求的运动员中，刚好到达小旗处的运动员的加速度最小.设这种情况下，冰球和运动员的加速度大小分别为 a 和 a_1，根据 $s_1=\frac{1}{2}a_1t^2$，运动员的位移为 s_1，要求解运动员的最小加速度 a_1，只要求出运动员的运动时间 t 即可.又由于冰球和运动员运动的时间相等，所以只要求出冰球的运动时间便可，求时间 t 有多种解题思路.

解法 1：应用匀变速直线运动的速度规律求解

冰球做匀减速运动，有 $v_1=v_0-at$

$\mu mg=ma$

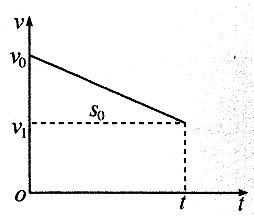
且 $\mu=\frac{v_0^2-v_1^2}{2gs_0}$，可以求解 $t=\frac{2s_0}{v_0+v_1}$.

解法 2：应用匀变速直线运动的平均速度与位移的关系求解

由位移公式 $s_0=\frac{v_0+v_1}{2}t$，

直接求解 $t=\frac{2s_0}{v_0+v_1}$.

解法 3：应用匀变速直线运动的“v-t”图象求解



●解析

如图,由图象可知 $s_0=\frac{v_0+v_1}{2}t$,

解得 $t=\frac{2s_0}{v_0+v_1}$.

解法4:应用动量定理求解

由动量定理得 $-\mu mgt=mv_1-mv_0$

且 $\mu=\frac{v_0^2-v_1^2}{2gs_0}$,

可以求解 $t=\frac{2s_0}{v_0+v_1}$.

然后根据题目条件,要求冰球到达挡板的同时,运动员运动的最小距离应等于起跑到小旗的距离 s_1,则运动员运动的最小位移 $s_1=\frac{1}{2}a_1t^2$

可以解得加速度的最小值为 $a_1=\frac{s_1(v_1+v_0)^2}{2s_0^2}$.

[**感悟方法**]

通过解决这个问题,我们会有两点收获:

1. 对于多对象的运动问题,关键是抓住运动对象之间的速度、位移、加速度的关系;比如本题中抓住“冰球”与“运动员”的运动时间相等.
2. 在选择物理规律对运动进行描述时,我们既要考虑到规律的可行性,更要考虑到规律的方便性,这个题目展现了物理解题的三条基本思路:

(1)“力”的方法:运动学规律与牛顿三大运动定律

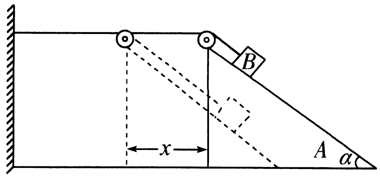
(2)“量”的方法:动量定理与动量守恒定律

(3)“能”的方法:动能定理和能量守恒定律

一般地,对于系统,我们选用动量守恒定律和能量守恒定律.对于单个物体对象,我们选用运动学规律、牛顿运动定律、动量定理与动能定理.

如果是匀变速运动,运用运动学规律结合牛顿运动定律,问题一般都能求解.但相对来讲,如果涉及时间要素,选择动量定理会更方便;如果涉及位移,选择动能关系或许会简便一些.

【例 2】(2016·高考江苏卷)如图所示,倾角为 α 的斜面 A 被固定在水平面上,细线的一端固定于墙面,另一端跨过斜面顶端的小滑轮与物块 B 相连,B 静止在斜面上.滑轮左侧的细线水平,右侧的细线与斜面平行.A、B 的质量均为 m.撤去固定 A 的装置后,A、B 均做直线运动.不计一切摩擦,重力加速度为 g.求:



(1)A 固定不动时,A 对 B 支持力的大小 N;

(2)A 滑动的位移为 x 时,B 的位移大小 s;

(3)A 滑动的位移为 x 时的速度大小 v_A.

●解析

(1)物块 B 受重力、支持力与绳子的拉力作用,根据力的平衡条件可得 A 对 B 的支持力的大小 $N=mg\cos\alpha$.

(2)**解法 1:利用几何关系求解**

撤去固定 A 的装置后,A、B 均做直线运动,当 A 运动的位移为 x 时,B 运动的位移为 s,如图 1 所示,过 C 点作 $CF\parallel DE$,四边形 $CDEF$ 为平行四边形,DE 的长度即为 B 的位移大小,那么 CF 的长度也等于 B 的位移大小.

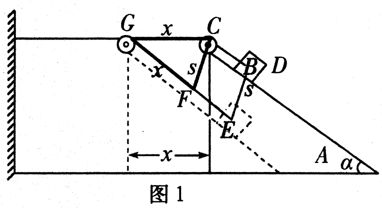


图 1

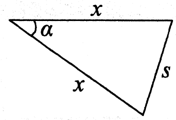


图 2

根据几何关系求 s 的方法又有多种,常用的有:

方法一:如图 3 所示,根据几何关系 $s_x=x\cdot(1-\cos\alpha)$,$s_y=x\cdot\sin\alpha$

且 $s=\sqrt{s_x^2+s_y^2}$

解得 $s=\sqrt{2(1-\cos\alpha)}\cdot x$.

解析

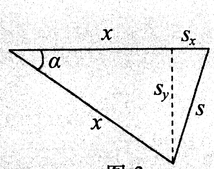


图 3

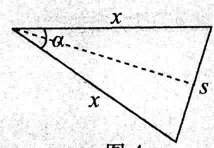


图 4

方法二： 如图 4 所示，根据几何关系可得 $s=2x\sin\frac{\alpha}{2}$.

方法三： 根据余弦定理可得 $s^2=x^2+x^2-2x^2\cos\alpha$.

解得 $s=x\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$.

方法四： 根据正弦定理可得 $\frac{s}{\sin\alpha}=\frac{x}{\sin\frac{\pi-\alpha}{2}}$

可解得 $s=2x\sin\frac{\alpha}{2}$.

解法 2：利用相对运动求解

由相对运动位移公式 $\vec{s}_{B对地}=\vec{s}_{B对A}+\vec{s}_{A对地}$，可画出位移矢量图示如图 5 所示，

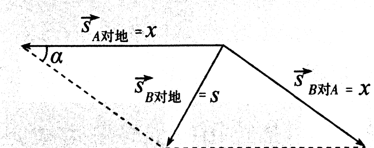


图 5

可得 $s=2x\sin\frac{\alpha}{2}$.

(3) 利用位移的几何关系，可得到 B 的下降高度 $s_y=x\cdot\sin\alpha$ ①

根据 A、B 系统机械能守恒定律 $mgs_y=\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}mv_B^2$ ②

要求 A 的速度，关键是要找出 A、B 两物体的速度关系，常用的解法有三种：

解法 1：利用速度的定义

根据速度的定义得 $v_A=\frac{\Delta x}{\Delta t}$，$v_B=\frac{\Delta s}{\Delta t}$

则 $v_B=\sqrt{2(1-\cos\alpha)}\cdot v_A$.

●解析

解法 2：极限处理方法

我们得出 $s=2x\sin\frac{\alpha}{2}$，对此进行处理可得$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{2\Delta x\sin\frac{\alpha}{2}}{\Delta t}$

取 $\Delta t\to 0$，得 $v_B=2v_A\sin\frac{\alpha}{2}$.

解法 3：利用相对运动方法

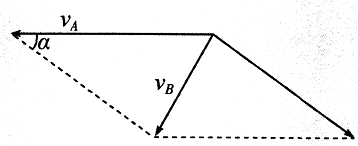


图 6

根据相对运动，可作出速度的矢量图示，如图 6 所示. 可得 $v_B=2v_A\sin\frac{\alpha}{2}$

得出 $v_B=2v_A\sin\frac{\alpha}{2}$或是 $v_B=\sqrt{2(1-\cos\alpha)}\cdot v_A$ 后，与①②两式联立可解得 $v_A=\sqrt{\frac{2gx\sin\alpha}{3-2\cos\alpha}}$.

［**感悟方法**］

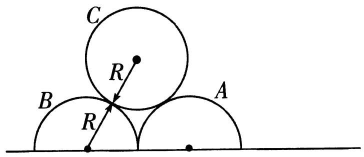
通过本题的求解，我们学到了处理多对象运动的两种基本方法：

1. **几何分析法**：通过作图，描述出每个对象运动的情景图，然后再通过图形分析寻找到对象运动之间的时间、空间关系. 这种方法一般接受起来比较容易，但对于一些比较复杂的情景，几何关系的处理比较繁杂，也只有作出清晰的图象加上较高的分析能力才能明确几何关系，这对我们的图象分析能力提出很高的要求.

2. **相对运动法**：利用相对运动结合运动的合成思想，解法简单快捷、思路流畅，是超越常规的解题方法. 但由于这个方法超越了高考说明的要求，一般的同学不愿意多花时间去学习训练，所以往往只是一些“尖子生”采用的方法. 其实，相对运动方法掌握起来并不困难，建议要想“搞定”压轴题的同学务必掌握这种好方法.

章节练习

1.(2017·高考江苏卷)如图所示,两个半圆柱 A、B 紧靠着静置于水平地面上,其上有一光滑圆柱 C,三者半径均为 R. C 的质量为 m,A、B 的质量都为 $\frac{m}{2}$,与地面间的动摩擦因数均为 μ. 现用水平向右的力拉 A,使 A 缓慢移动,直至 C 恰好降到地面. 整个过程中 B 保持静止. 设最大静摩擦力等于滑动摩擦力,重力加速度为 g. 求:

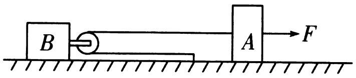


(1)未拉 A 时,C 受到 B 作用力的大小 F;

(2)动摩擦因数的最小值 μ_{min};

(3)A 移动的整个过程中,拉力做的功 W.

2.(2016·高考海南卷)水平地面上有质量分别为 m 和 $4m$ 的物块 A 和 B,两者与地面的动摩擦因数均为 μ. 细绳的一端固定,另一端跨过轻质动滑轮与 A 相连,动滑轮与 B 相连,如图所示. 初始时,绳处于水平拉直状态. 若物块 A 在水平向右的恒力 F 作用下向右移动了距离 s,重力加速度大小为 g. 求:



(1)物块 B 克服摩擦力所做的功;

(2)物块 A、B 的加速度大小.

3.(2013·高考全国卷Ⅰ)水平桌面上有两个玩具车 A 和 B,两者用一轻质细橡皮筋相连,在橡皮筋上有一红色标记 R.在初始时橡皮筋处于拉直状态,A、B 和 R 分别位于直角坐标系中的 $(0,2l)$、$(0,-l)$ 和 $(0,0)$ 点.已知 A 从静止开始沿 y 轴正向做加速度大小为 a 的匀加速运动;B 平行于 x 轴朝 x 轴正向匀速运动.在两车此后运动的过程中,标记 R 在某时刻通过点 (l,l).假定橡皮筋的伸长是均匀的,求 B 运动速度的大小.

4. (2013·高考四川卷)近来,我国多个城市开始重点治理“中国式过马路”行为,如图1所示.每年全国由于行人不遵守交通规则而引发的交通事故上万起,死亡上千人.只有科学设置交通管制,人人遵守交通规则,才能保证行人的生命安全.

如图2所示,停车线 AB 与前方斑马线边界 CD 间的距离为 23 m.质量 8 t、车长 7 m 的卡车以 54 km/h 的速度向北匀速行驶,当车前端刚驶过停车线 AB,该车前方的机动车交通信号灯由绿灯变黄灯.

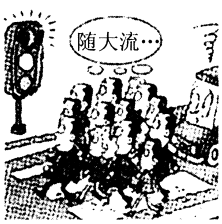


图1

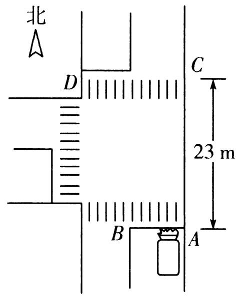


图2

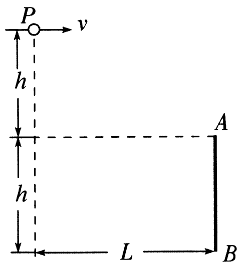
(1)若此时前方 C 处人行横道路边等待的行人就抢先过马路,卡车司机发现行人,立即制动,卡车受到的阻力为 3×10^4 N.求卡车的制动距离;

(2)若人人遵守交通规则,该车将不受影响地驶过前方斑马线边界 CD.为确保行人安全,D 处人行横道信号灯应该在南北向机动车信号灯变黄灯后至少多久变为绿灯?

第二讲 基本运动之平抛运动

典例剖析

【例 1】(2016·高考浙江卷)在真空环境内探测微粒在重力场中能量的简化装置如图所示. P 是一个微粒源,能持续水平向右发射质量相同、初速度不同的微粒. 高度为 h 的探测屏 AB 竖直放置,离 P 点的水平距离为 L,上端 A 与 P 点的高度差也为 h.



(1)若微粒打在探测屏 AB 的中点,求微粒在空中飞行的时间;

(2)求能被屏探测到的微粒的初速度范围;

(3)若打在探测屏 A、B 两点的微粒的动能相等,求 L 与 h 的关系.

解析

(1)打在中点的微粒,由平抛运动规律在竖直方向上做自由落体运动可得

$$\frac{3}{2}h=\frac{1}{2}gt^2$$

解得 $t=\sqrt{\frac{3h}{g}}$.

(2)打在 B 点的微粒,水平方向 $v_1=\frac{L}{t_1}$;

竖直方向 $2h=\frac{1}{2}gt_1^2$

解得 $v_1=L\sqrt{\frac{g}{4h}}$ ①

● 解析

同理，打在 A 点的微粒初速度 $v_2=L\sqrt{\frac{g}{2h}}$ ②

微粒初速度范围 $L\sqrt{\frac{g}{4h}}\leqslant v\leqslant L\sqrt{\frac{g}{2h}}$.

(3)**解法 1：利用平抛运动规律求解**

如图 1 所示，平抛运动竖直方向上做自由落体运动可得 $v_{Ay}=\sqrt{2gh}$ ③

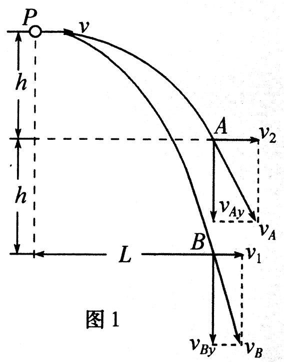


图 1

$v_{By}=2\sqrt{gh}$ ④

根据速度的合成 $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$，可得

$v_A=\sqrt{v_2^2+v_{Ay}^2}=\sqrt{\frac{gL^2}{2h}+2gh}$

$v_B=\sqrt{v_1^2+v_{By}^2}=\sqrt{\frac{gL^2}{4h}+4gh}$

由于质量相同的微粒打到探测屏 A、B 两点时动能相同，可得 $v_A=v_B$

即 $\sqrt{\frac{gL^2}{2h}+2gh}=\sqrt{\frac{gL^2}{4h}+4gh}$

可得 $L=2\sqrt{2}h$.

解法 2：利用动能定理求解

微粒从 P 点分别打在 A、B 两点，根据动能定理，可得

$mgh=\frac{1}{2}mv_A^2-\frac{1}{2}mv_2^2$

●解析

$2mgh=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_1^2$

由题意得$\frac{1}{2}mv_A^2=\frac{1}{2}mv_B^2$

即 $mgh+\frac{1}{2}mv_2^2=2mgh+\frac{1}{2}mv_1^2$

结合①②式可得 $L=2\sqrt{2}h$.

解法 3：利用能量守恒定律求解

微粒从 P 点分别打在 A、B 两点，根据能量守恒定律，可得

$mgh+\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{1}{2}mv_A^2$

$2mgh+\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}mv_B^2$

由题意得$\frac{1}{2}mv_A^2=\frac{1}{2}mv_B^2$

即 $mgh+\frac{1}{2}mv_2^2=2mgh+\frac{1}{2}mv_1^2$

结合①②式可得 $L=2\sqrt{2}h$.

解法 4：利用相似三角形规律求解

根据平抛运动的末速度的反向延长线交于水平位移的中点 C，如图 2 所示，可以利用相似三角形规律，可得

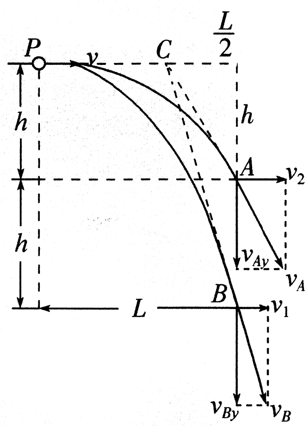


图 2

●解析

$$\frac{\frac{L}{2}}{v_2}=\frac{h}{v_{Ay}}=\frac{\sqrt{(L/2)^2+h^2}}{v_A}$$

$$\frac{\frac{L}{2}}{v_1}=\frac{h}{v_{By}}=\frac{\sqrt{(L/2)^2+(2h)^2}}{v_B}$$

由于质量相同的微粒打到探测屏 A、B 两点时动能相同，可得 $v_A=v_B$

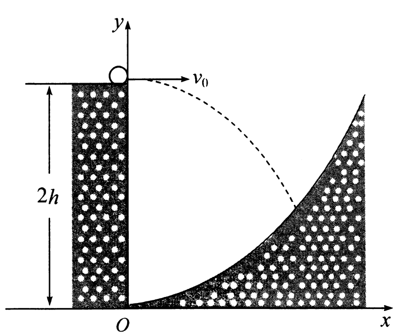
结合①②③④式可得 $L=2\sqrt{2}h$.

[**感悟方法**]

本题的求解展示了处理平抛运动的常用方法：

1. **运动的合成与分解法**：对于求平抛运动的时间，一般都要将平抛运动分解成两个分方向运动来处理. 对于某一时刻的速度，一般也是先求两个分方向运动的速度，然后再合成.
2. **能量守恒方法**：对于某一时刻的速度，还有一种比较方便的方法就是利用能量的观点来处理.
3. **平面几何关系法**：由于“某时刻平抛运动物体速度的反向延长线经过该时刻水平位移的中点”，据此可以得到速度偏向角与位移偏向角之间满足的关系. 根据这个关系，我们往往可以找到一些破解问题的几何关系.

【例 2】(2012·高考全国卷)一探险队员在探险时遇到一山沟，山沟的一侧竖直，另一侧的坡面呈抛物线形状. 此队员从山沟的竖直一侧，以速度 v_0 沿水平方向跳向另一侧坡面. 如图所示，以沟底的 O 点为原点建立坐标系 Oxy. 已知，山沟竖直一侧的高度为 $2h$，坡面的抛物线方程为 $y=\frac{1}{2h}x^2$，探险队员的质量为 m. 人视为质点，忽略空气阻力，重力加速度为 g.



(1)求此人落到坡面时的动能；

(2)此人水平跳出的速度为多大时，他落在坡面时的动能最小？动能的最小值为多少？

●解析

(1)解法 1：利用平抛运动的规律求解

设该队员在空中运动的时间为 t，在坡面上落点的横坐标为 x，纵坐标为 y. 由平抛运动规律得 $x=v_0 t$

$$2h-y=\frac{1}{2}gt^2$$

根据题意有 $y=\dfrac{x^2}{2h}$

可得 $t=\sqrt{\dfrac{4h^2}{v_0^2+gh}}$

落点处的竖直分速度 $v_y=gt$

落点处的速度 $v=\sqrt{v_0^2+v_y^2}$

解得落点处的动能 $E_k=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}m\left(v_0^2+\dfrac{4g^2h^2}{v_0^2+gh}\right)$.

解法 2：利用机械能守恒定律求解

设该队员在空中运动的时间为 t，在坡面上落点的横坐标为 x，纵坐标为 y. 由平抛运动规律得

$$x=v_0 t$$

$$2h-y=\frac{1}{2}gt^2$$

根据题意有 $y=\dfrac{x^2}{2h}$

由机械能守恒，落到坡面时的动能为 $\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}mv_0^2+mg(2h-y)$

联立各式解得 $E_k=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}m\left(v_0^2+\dfrac{4g^2h^2}{v_0^2+gh}\right)$.(＊)

●解析

(2)**解法 1:利用配方法求解**

(*)式可以改写为 $E_k=\frac{1}{2}m\left(\sqrt{v_0^2+gh}-\frac{2gh}{\sqrt{v_0^2+gh}}\right)^2+\frac{3}{2}mgh$

动能极小的条件为上式中的平方项等于0,也就是$\sqrt{v_0^2+gh}=\frac{2gh}{\sqrt{v_0^2+gh}}$,即 $v_0=\sqrt{gh}$时,动能的最小值 $E_{km}=\frac{3}{2}mgh$.

解法 2:利用均值不等式求解

(*)式可以改写为 $E_k=\frac{1}{2}mgh\left(\frac{v_0^2}{gh}+\frac{4gh}{v_0^2+gh}\right)^2=\frac{1}{2}mgh\left(\frac{v_0^2+gh}{gh}+\frac{4gh}{v_0^2+gh}-1\right)$

当且仅当$\frac{v_0^2+gh}{gh}=\frac{4gh}{v_0^2+gh}$,即 $v_0=\sqrt{gh}$时,落点的动能最小:$E_{km}=\frac{3}{2}mgh$.

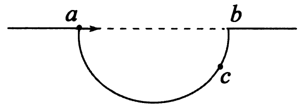
[**感悟方法**]

通过本题求解,我们可以有两点收获:

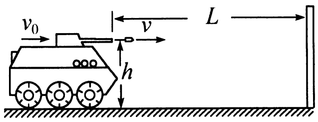
1. **对题目特点的认识**:本题是可爱的平抛运动与抛物线形状坡面的“偶遇”,无非是抛物线坡面对平抛运动的时间与空间进行了“约束”,也就是说平抛运动的位置坐标同时符合抛物线的代数方程.我们经常做到的平抛运动遇到水平面、竖直面、圆形面等等各种曲面问题,其本质都是如此.
2. **求极值的一般方法**:求极值的方法一般有物理方法和数学方法.若能从物理现象的分析中找到一些临界、边界条件,这些条件往往就是极值条件,那么我们直接根据这些条件求出极值即可.若无法直接找到这些条件,一般可以用函数的方法来求极值.具体地,先根据物理现象写出自变量与应变量的关系,然后根据函数求极值的方法来求解即可,本题就是采用了这种方法.

章节练习

1.(2011·高考海南卷)如图,水平地面上有一个坑,其竖直截面为半圆. ab 为沿水平方向的直径. 若在 a 点以初速度 v_0 沿 ab 方向抛出一小球,小球会击中坑壁上的 c 点. 已知 c 点与水平地面的距离为圆半径的一半,求圆的半径.



2.(2014·高考浙江卷)如图所示,装甲车在水平地面上以速度 $v_0=20\ \text{m/s}$ 沿直线前进,车上机枪的枪管水平,距地面高为 $h=1.8\ \text{m}$. 在车正前方竖直立一块高为两米的长方形靶,其底边与地面接触.枪口与靶距离为 L 时,机枪手正对靶射出第一发子弹,子弹相对于枪口的初速度为 $v=800\ \text{m/s}$. 在子弹射出的同时,装甲车开始匀减速运动,行进 $s=90\ \text{m}$ 后停下.装甲车停下后,机枪手以相同方式射出第二发子弹.(不计空气阻力,子弹看成质点,重力加速度 g 取 $10\ \text{m/s}^2$)

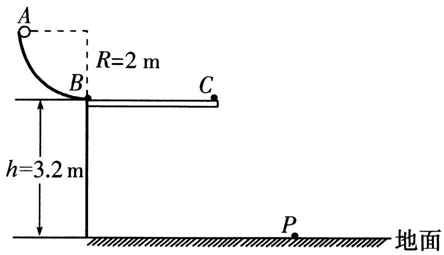


(1)求装甲车匀减速运动时的加速度大小;

(2)当 $L=410\ \text{m}$ 时,求第一发子弹的弹孔离地的高度,并计算靶上两个弹孔之间的距离;

(3)若靶上只有一个弹孔,求 L 的范围.

3.(2018·浙江4月)如图所示,一轨道由半径为 $R=2$ m 的四分之一竖直圆弧轨道 AB 和长度可调的水平直轨道 BC 在 B 点平滑连接而成.现有一质量为 0.2 kg 的小球从 A 点无初速度释放,经过圆弧上 B 点时,传感器测得轨道所受压力大小为 3.6 N,小球经过 BC 段所受阻力为其重力的 0.2 倍,然后从 C 点水平飞离轨道,落到水平地面上的 P 点,P、C 两点间的高度差为 3.2 m.小球运动过程中可视为质点,且不计空气阻力.



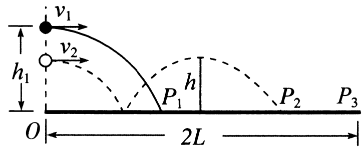
(1)求小球运动至 B 点的速度大小;

(2)求小球在圆弧轨道上克服摩擦力所做的功;

(3)为使小球落点 P 与 B 点的水平距离最大,求 BC 段的长度;

(4)小球落到 P 点后弹起,与地面多次碰撞后静止.假设小球每次碰撞机械能损失 75%,碰撞前后速度方向与地面的夹角相等.求小球从 C 点飞出到最后静止所需的时间.

4.(2008·**高考江苏卷**)抛体运动在各类体育运动项目中很常见,如乒乓球运动.现讨论乒乓球发球问题,设球台长$2L$、网高h,乒乓球反弹前后水平分速度不变,竖直分速度大小不变、方向相反,且不考虑乒乓球的旋转和空气阻力.(设重力加速度为g)



(1)若球在球台边缘O点正上方高度为h_1处以速度v_1水平发出,落在球台的P_1点(如图实线所示),求P_1点距O点的距离x_1.

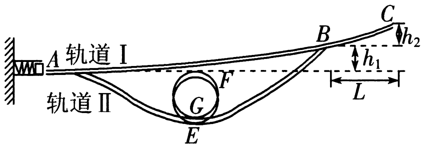
(2)若球在O点正上方以速度v_2水平发出,恰好在最高点时越过球网落在球台的P_2点(如图虚线所示),求v_2的大小.

(3)若球在O点正上方水平发出后,球经反弹恰好越过球网且刚好落在对方球台边缘P_3点,求发球点距O点的高度h_3.

第三讲 基本运动之圆周运动

典例剖析

【例 1】(2016·浙江 4 月)如图所示,装置由一理想弹簧发射器及两个轨道组成.其中轨道Ⅰ由光滑轨道 AB 与粗糙直轨道 BC 平滑连接,高度差分别是 $h_1=0.20$ m、$h_2=0.10$ m,BC 水平距离 $L=1.00$ m.轨道Ⅱ由 AE、螺旋圆形 EFG 和 GB 三段光滑轨道平滑连接而成,且 A 点与 F 点等高.当弹簧压缩量为 d 时,恰能使质量 $m=0.05$ kg 的滑块沿轨道Ⅰ上升到 B 点;当弹簧压缩量为 $2d$ 时,恰能使滑块沿轨道Ⅰ上升到 C 点.(已知弹簧弹性势能与压缩量的平方成正比)



(1)当弹簧压缩量为 d 时,求弹簧的弹性势能及滑块离开弹簧瞬间的速度大小;

(2)求滑块与轨道 BC 间的动摩擦因数;

(3)当弹簧压缩量为 d 时,若沿轨道Ⅱ运动,滑块能否上升到 B 点?请通过计算说明理由.

●解析

(1)解法 1:由动能定理求解

滑块从弹簧压缩最短到最后到达 B 点,设弹簧弹力做功为 W,由动能定理有

$W-mgh_1=0$

根据功能关系,弹簧的弹力做功 $W=E_{弹}$

可得 $E_{弹}=0.1$ J

弹簧恢复原长过程,由动能定理有 $W=\frac{1}{2}mv_0^2$

可解得 $v_0=2$ m/s.

●解析

解法 2:由机械能守恒定律求解

滑块从弹簧压缩最短到最后到达 B 点,设弹簧的弹性势能为 $E_{弹}$,对弹簧和滑块系统,根据机械能守恒有 $E_{弹}=\Delta E_k=mgh_1=0.05\times10\times0.20\ \text{J}=0.1\ \text{J}$

由 $\Delta E_k=\dfrac{1}{2}mv_0^2$ 可得 $v_0=2\ \text{m/s}$.

(2)由 $E_{弹}\propto d^2$ 可得 $\Delta E_k'=E_{弹}'=4E_{弹}=4mgh_1$

由动能定理可得 $-mg(h_1+h_2)-\mu mgL=-\Delta E_k'$

解得 $\mu=\dfrac{3h_1-h_2}{L}=0.5$.

(3)恰能通过圆环最高点须满足的条件是 $mg=\dfrac{mv^2}{R_m}$

A 点和 F 点等高,由机械能守恒定律有 F 点的速度 $v=v_0=2\ \text{m/s}$

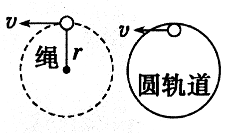
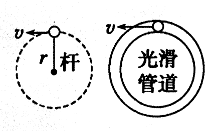
解得 $R_m=0.4\ \text{m}$

当 $R>R_m=0.4\ \text{m}$ 时,滑块会脱离螺旋轨道,不能上升到 B 点.

当 $R<R_m=0.4\ \text{m}$ 时,滑块不会脱离螺旋轨道,可以上升到 B 点.

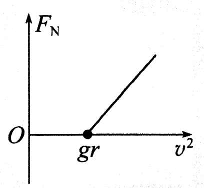
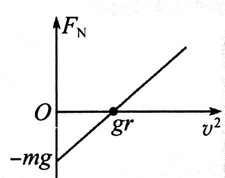
[**感悟方法**]

本题的重、难点在第(3)小题,是一个竖直平面内圆周运动的临界问题.物体在竖直面内做的圆周运动是一种典型的变速曲线运动,该类运动常有临界问题,并伴有“最大”“最小”“刚好”等词语,常分析两种模型——轻绳模型和轻杆模型,分析比较如下:

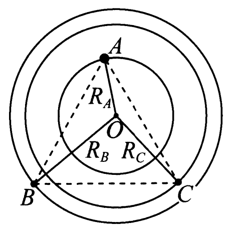
	轻绳模型	轻杆模型
常见类型	 均是没有支撑的小球	 均是有支撑的小球
过最高点的临界条件	由 $mg=m\dfrac{v^2}{r}$ 得 $v_{临}=\sqrt{gr}$	由小球恰能做圆周运动即得 $v_{临}=0$

●解析

（续表）

	轻绳模型	轻杆模型
讨论分析	(1)过最高点时，$v \geq \sqrt{gr}$，$F_N + mg = m\dfrac{v^2}{r}$，绳、轨道对球产生弹力 F_N (2)不能过最高点时，$v < \sqrt{gr}$，在到达最高点前小球已经脱离了圆轨道	(1)当 $v=0$ 时，$F_N=mg$，F_N 为支持力，沿半径背离圆心 (2)当 $0<v<\sqrt{gr}$时，$-F_N+mg=m\dfrac{v^2}{r}$，F_N 背向圆心，随 v 的增大而减小 (3)当 $v=\sqrt{gr}$时，$F_N=0$ (4)当 $v>\sqrt{gr}$时，$F_N+mg=m\dfrac{v^2}{r}$，F_N 指向圆心并随 v 的增大而增大
在最高点的 F_N 图线	 取竖直向下为正方向	 取竖直向下为正方向

【例 2】(2015·高考安徽卷)由三颗星体构成的系统，忽略其他星体对它们的作用，存在着一种运动形式，三颗星体在相互之间的万有引力作用下，分别位于等边三角形的三个顶点上，绕某一共同的圆心 O 在三角形所在的平面内做相同角速度的圆周运动(图示为 A、B、C 三颗星体质量不相同时的一般情况)．若 A 星体质量为 $2m$，B、C 两星体的质量均为 m，三角形的边长为 a，求：



(1)A 星体所受合力大小 F_A；

(2)B 星体所受合力大小 F_B；

(3)C 星体的轨道半径 R_C；

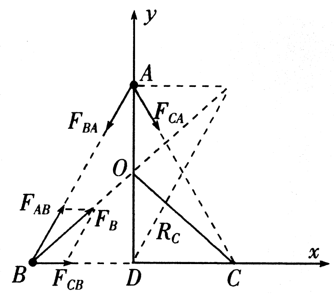
(4)三星体做圆周运动的周期 T．

解析

(1)由万有引力定律,A 星体所受 B、C 星体引力大小为

$$F_{BA}=G\frac{m_Am_B}{r^2}=G\frac{2m^2}{a^2}=F_{CA}$$

方向如图所示



则合力大小为 $F_A=2\sqrt{3}G\frac{m^2}{a^2}$.

(2)同上,B 星体所受 A、C 星体引力大小分别为

$$F_{AB}=\frac{Gm_Am_B}{r^2}=G\frac{2m^2}{a^2}$$

$$F_{CB}=G\frac{m_Cm_B}{r^2}=G\frac{m^2}{a^2}$$

方向如图所示

接下来,运用几何方法求解 F_B,具体有以下几种解法:

解法 1:正交分解方法

对星体 B 受力分析,有

x 方向:$F_{Bx}=F_{AB}\cos 60°+F_{CB}=2G\frac{m^2}{a^2}$

y 方向:$F_{By}=F_{AB}\sin 60°=\sqrt{3}G\frac{m^2}{a^2}$

可得 $F_B=\sqrt{F_{Bx}^2+F_{By}^2}=\sqrt{7}G\frac{m^2}{a^2}$.

●解析

解法 2：余弦定理方法

$F_B=\sqrt{F_{AB}^2+F_{CB}^2-2F_{AB}\cdot F_{CB}\cos 120^\circ}$

代入可得 $F_B=\sqrt{7}G\dfrac{m^2}{a^2}$.

(3)**解法 1：勾股定理方法**

星球 B、C 的质量均为 m，根据对称性并考虑等效性，可以把星球 B、C 等效为 B、C 连线中点 D 处，质量为 $2m$ 的星球 D. 星球 A 的质量也为 $2m$，同样可以把星球 A、D 等效为 A、D 连线中点 O 处，即 O 点就是三个星体做圆周运动的中心.

圆心 O 在中垂线 AD 的中点，可得 $R_A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$

在直角三角形$\triangle ODC$中，根据勾股定理有

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a-R_A\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}a\right)^2=R_C^2$

可得到 $R_C=\dfrac{\sqrt{7}}{4}a$.

解法 2：余弦定理方法

圆心 O 在中垂线 AD 的中点，$R_A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$

在三角形$\triangle OAC$中，根据余弦定理有 $R_C^2=R_A^2+a^2-2R_A\cdot a\cos 30^\circ$

可得到 $R_C=\dfrac{\sqrt{7}}{4}a$.

(4)三星体运动周期相同，对 C 星体，由 $F_C=F_B=\sqrt{7}G\dfrac{m^2}{a^2}=m\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2R_C$

可得 $T=\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{Gm}}$.

●解析

［感悟方法］

对于天体运动问题，我们要关注以下几点：

1. 要明确星体做匀速圆周运动的向心力来源

A、B、C 三星体各自做圆周运动的向心力均来自另外两个星体对它的万有引力的合力.

2. 要明确三个星体中做匀速圆周运动的运动参量的关系

A、B、C 三星体绕某一共同的圆心 O 在三角形所在平面内做圆周运动，那么它们具有相同的角速度.

3. 要注意区分星体之间距离 r 与星体做圆周运动的轨道半径 r

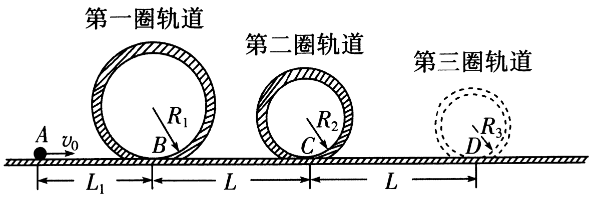
万有引力公式 $F=G\frac{Mm}{r^2}$，星体做圆周运动的向心力公式 $F_{向}=m\frac{v^2}{r}=m\omega^2 r$，两个"$r$"的含义不同. $F=G\frac{Mm}{r^2}$中的"r"指的是 M、m 两星体球心之间的距离. $F_{向}=m\frac{v^2}{r}=m\omega^2 r$ 中的"r"指的是星体做圆周运动的轨道半径 r.

4. 要注意找到天体运动过程中的时间与空间关系

物理解题一般有两种方程，一个是物理方程，这主要来自对过程和状态的理解与描述，还有一个是辅助方程，是反映题目的具体要求的，是由具体要求所涉及的物理量之间的关系组成的方程，来自对具体题目的已知条件和隐含条件的认识. 从解题过程看，问题的难点就在于对辅助方程的获得，时空关系不仅是获得辅助方程的一个重要方向，更重要的是本题对空间关系的不同认识给我们扩大了解题思路，锻炼了我们的思维.

章节练习

1.(2009·高考安徽卷)过山车是游乐场中常见的设施.如图是一种过山车的简易模型,它由水平轨道和在竖直平面内的三个圆形轨道组成,B、C、D 分别是三个圆形轨道的最低点,B、C 间距与 C、D 间距相等,半径 $R_1=2.0\ \text{m}$、$R_2=1.4\ \text{m}$.一个质量为 $m=1.0\ \text{kg}$ 的小球(视为质点),从轨道的左侧 A 点以 $v_0=12.0\ \text{m/s}$ 的初速度沿轨道向右运动,A、B 间距 $L_1=6.0\ \text{m}$.小球与水平轨道间的动摩擦因数 $\mu=0.2$,圆形轨道是光滑的.假设水平轨道足够长,圆形轨道间不相互重叠.重力加速度 g 取 $10\ \text{m/s}^2$,计算结果保留小数点后一位数字.试求:

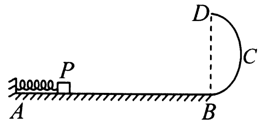


(1)小球在经过第一个圆形轨道的最高点时,轨道对小球作用力的大小;

(2)如果小球恰能通过第二圆形轨道,B、C 间距 L 应是多少;

(3)在满足(2)的条件下,如果要使小球不能脱离轨道,在第三个圆形轨道的设计中,半径 R_3 应满足的条件;小球最终停留点与起点 A 的距离.

2.(2016·高考全国卷Ⅱ)轻质弹簧原长为 $2l$,将弹簧竖直放置在地面上,在其顶端将一质量为 $5m$ 的物体由静止释放,当弹簧被压缩到最短时,弹簧长度为 l.现将该弹簧水平放置,一端固定在 A 点,另一端与物块 P 接触但不连接.AB 是长度为 $5l$ 的水平轨道,B 端与半径为 l 的光滑半圆轨道 BCD 相切,半圆的直径 BD 竖直,如图所示.物块 P 与 AB 间的动摩擦因数 $\mu=0.5$.用外力推动物块 P,将弹簧压缩至长度 l,然后放开,P 开始沿轨道运动.重力加速度大小为 g.



(1)若 P 的质量为 m,求 P 到达 B 点时速度的大小,以及它离开圆轨道后落回到 AB 上的位置与 B 点之间的距离;

(2)若 P 能滑上圆轨道,且仍能沿圆轨道滑下,求 P 的质量的取值范围.

3.(2014·高考全国卷Ⅲ)已知地球的自转周期和半径分别为 T 和 R,地球同步卫星 A 的圆轨道半径为 h.卫星 B 沿半径为 $r(r<h)$ 的圆轨道在地球赤道的正上方运行,其运行方向与地球自转方向相同.求:

(1)卫星 B 做圆周运动的周期;

(2)卫星 A 和 B 连续地不能直接通信的最长时间间隔(信号传输时间可忽略).

4.(2009·高考天津卷)2008年12月,天文学家们通过观测的数据确认了银河系中央的黑洞“人马座 A^*”的质量与太阳质量的倍数关系.研究发现,有一星体S2绕人马座 A^* 做椭圆运动,其轨道半长轴为 9.50×10^2 天文单位(地球公转轨道的半径为一个天文单位),人马座 A^* 就处在该椭圆的一个焦点上.观测得到S2星的运行周期为15.2年.

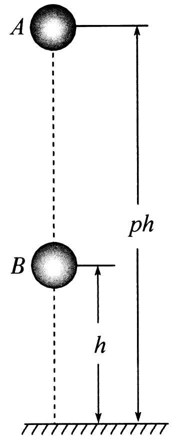
(1)若将S2星的运行轨道视为半径 $r=9.50\times10^2$ 天文单位的圆轨道,试估算人马座 A^* 的质量 M_A 是太阳质量 M_S 的多少倍(结果保留一位有效数字);

(2)黑洞的第二宇宙速度极大,处于黑洞表面的粒子即使以光速运动,其具有的动能也不足以克服黑洞对它的引力束缚.由于引力的作用,黑洞表面处质量为 m 的粒子具有的势能为 $E_p=-G\dfrac{Mm}{R}$(设粒子在离黑洞无限远处的势能为零),式中 M、R 分别表示黑洞的质量和半径.已知引力常量 $G=6.7\times10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$,光速 $c=3.0\times10^8$ m/s,太阳质量 $M_S=2.0\times10^{30}$ kg,太阳半径 $R_S=7.0\times10^8$ m,不考虑相对论效应,利用上问结果,在经典力学范围内求人马座 A^* 的半径 R_A 与太阳半径 R_S 之比应小于多少(结果按四舍五入保留整数).

第四讲 力学经典之碰撞类问题

典例剖析

【例 1】(2003·高考江苏卷)在一种新的"子母球"表演中,让同一竖直线上的小球 A 和小球 B,从距水平地面高度为 $ph(p>1)$ 和 h 的地方同时由静止释放,如图所示.球 A 的质量为 m,球 B 的质量为 $3m$.设所有碰撞都是弹性碰撞,重力加速度大小为 g,忽略球的直径、空气阻力及碰撞时间.



(1)求球 B 第一次落地时球 A 的速度大小;

(2)若球 B 在第一次上升过程中就能与球 A 相撞,求 p 的取值范围;

(3)在(2)情形下,要使球 A 第一次碰后能到达比其释放点更高的位置,求 p 应满足的条件.

●解析

解法 1:解析法

(1)A、B 两球都做自由落体运动,加速度相同,B 球下落 h 的高度时,A 球也下落 h 的高度,由 $v_0^2=2gh$ 得 $v_0=\sqrt{2gh}$.

(2)B 球下落后又反弹,若刚弹起时与 A 球刚好碰撞,设 B 球的下落时间为 t_1,则

$$h=\frac{1}{2}gt_1^2$$

解得 $t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}$,

即 $t_A>t_1$,$\sqrt{\frac{2ph}{g}}>\sqrt{\frac{2h}{g}}$,故 $p>1$

若反弹至最高点时与 A 球相撞,则可得

$$\sqrt{\frac{2(p-1)h}{g}}<2\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

可解得 $p<5$

因此 $1<p<5$.

●解析

(3)设 B 球下落后与地面碰撞又上升 L 的距离，刚好与 A 球相撞，此时，$0<L<h$，则两球从开始下落到发生碰撞所经历的时间相同.

对 A 球，$t_A=\sqrt{\dfrac{2(ph-L)}{g}}$

对 B 球，先下落至地面，历时 $t_{B1}=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$，后又做竖直上抛运动，初速度为 $v=\sqrt{2gh}$

由 $L=\sqrt{2gh}t_{B2}-\dfrac{1}{2}gt_{B2}^2$ 得 $t_{B2}=\dfrac{\sqrt{2gh}-\sqrt{2g(h-L)}}{g}$

$t_B=t_{B1}+t_{B2}=2\sqrt{\dfrac{2h}{g}}-\sqrt{\dfrac{2(h-L)}{g}}$

由于碰撞时 A、B 球的运动时间相同，因此

$\sqrt{\dfrac{2(ph-L)}{g}}=2\sqrt{\dfrac{2h}{g}}-\sqrt{\dfrac{2(h-L)}{g}}$

解之得 $L=\dfrac{10p-9-p^2}{16}h$ ①

由(2)知 $1<p<5$，碰撞前一瞬间，$v_A=\sqrt{2g(ph-L)}=(p+3)\sqrt{\dfrac{gh}{8}}$ ②

因碰撞过程中内力远大于外力，此碰撞过程可看成动量守恒的过程，若规定竖直向上为正方向，则由动量守恒定律得

$m_Bv_B-m_Av_A=m_Av_A{}'+m_Bv_B{}'$ ③

又是弹性碰撞，机械能也守恒，即

$\dfrac{1}{2}m_Av_A^2+\dfrac{1}{2}m_Bv_B^2=\dfrac{1}{2}m_Av'^2_A+\dfrac{1}{2}m_Bv'^2_B$ ④

由以上四式，并代入数据得，$v'_A=\dfrac{9-p}{4}\sqrt{2gh}$

而根据题意知，A 球反弹的高度比其释放点高，设 A 球上升 s 米，

$s=\dfrac{v'^2_A}{2g}>ph-L=\dfrac{6ph+9h+p^2h}{16}$

即 $\dfrac{9-p}{4}\sqrt{2gh}>(p+3)\sqrt{\dfrac{gh}{8}}$

可解得 $p<3$

由(2)知 $p>1$

因此 $1<p<3$.

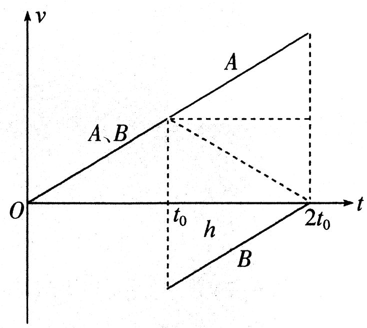
●解析

解法 2:图象法

对于第(2)(3)两问,我们还可以用图象法来解决.

(2)若 $p=1$,球 B 在反弹离地瞬间与球 A 相碰撞.

设 B 球落地的时间为 t_0,若当 B 球在最高点与球 A 相碰撞,碰撞的时刻为 $2t_0$.规定竖直向下为正方向,作出 A、B 球的运动的 v-t 图象,如图所示.那么由图可知,相碰撞时,B 离地高度 h,A 下落高度为 $4h$,所以 $h+4h=ph$,可得 $p=5$.所以 p 的取值范围:$1<p<5$.



(3)A、B 碰撞时,因内力远大于外力,碰撞过程可看成动量守恒的过程,若规定竖直向下为正方向,则由动量守恒定律得 $-m_Bv_B+m_Av_A=-m_Av_A'+m_Bv_B'$

又是弹性碰撞,机械能也守恒,即 $\frac{1}{2}m_Av_A^2+\frac{1}{2}m_Bv_B^2=\frac{1}{2}m_Av'^2_A+\frac{1}{2}m_Bv'^2_B$

可解得 $v'_A=\left(\frac{1}{2}v_A+\frac{3}{2}v_B\right)$

要求使得 A 球第一次碰撞后能到达比释放点更高的位置,应当满足条件

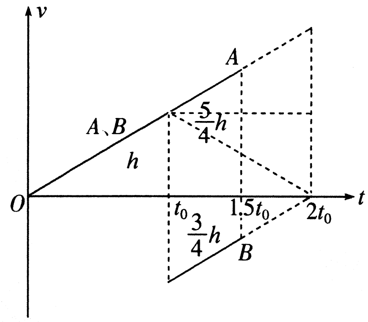
$|v'_A|>v_A$

可得 $v_A<3v_B$

若考虑 A 球碰后刚好回到原处的临界情景,即 $v_A=3v_B$,结合如图所示的 v-t 图可以知道,碰撞发生在 $t=1.5t_0$ 时刻,碰撞时 B 离地高度 $\frac{3}{4}h$,A 下落高度为 $\frac{9}{4}h$,所以 $\frac{3}{4}h+\frac{9}{4}h=ph$,可得 $p=3$.

●解析

若碰撞时刻 $t<1.5t_0$，由图可知碰撞时均满足 $v_A<3v_B$，又由第(2)问可知 $p>1$，因此 $1<p<3$.



[感悟方法]

对于“碰撞”我们要掌握以下一些内容：

1.碰撞的特点

根据时间长短，我们往往将物理过程分为持续性过程与短暂性过程.碰撞是一种典型的短暂性过程，由于碰撞过程的时间极短，所以可以认为碰撞过程系统所受到的外力远小于系统内部相互作用的内力，所以系统的外力冲量可以忽略，因此碰撞的过程系统的动量是守恒的.

2.碰撞的种类及特点

分类标准	种类	特点
机械能是否守恒	弹性碰撞	动量守恒，机械能守恒
	非弹性碰撞	动量守恒，机械能有损失
	完全非弹性碰撞	动量守恒，机械能损失最大
碰撞前后动量是否共线	对心碰撞(正碰)	碰撞前后速度共线
	非对心碰撞(斜碰)	碰撞前后速度不共线

3.弹性碰撞的规律

两球发生弹性碰撞时满足动量守恒定律和机械能守恒定律.

以质量为 m_1，速度为 v_1 的小球与质量为 m_2 的静止小球发生正面弹性碰撞为例，则有 $m_1v_1=m_1v_1'+m_2v_2'$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

解得 $v_1'=\dfrac{(m_1-m_2)v_1}{m_1+m_2}$　$v_2'=\dfrac{2m_1v_1}{m_1+m_2}$.

●解析

［结论］

(1)当两球质量相等时，$v_1'=0$，$v_2'=v_1$，两球碰撞后交换了速度.

(2)当质量大的球碰质量小的球时，$v_1'>0$，$v_2'>0$，碰撞后两球都向前运动.

(3)当质量小的球碰质量大的球时，$v_1'<0$，$v_2'>0$，碰撞后质量小的球被反弹回来.

【例 2】(2016·高考北京卷)(1)动量定理可以表示为 $\Delta p=F\Delta t$，其中动量 p 和力 F 都是矢量.在运用动量定理处理二维问题时，可以在相互垂直的 x、y 两个方向上分别研究.例如，质量为 m 的小球斜射到木板上，入射的角度是 θ，碰撞后弹出的角度也是 θ，碰撞前后的速度大小都是 v，如图 1 所示.碰撞过程中忽略小球所受重力.

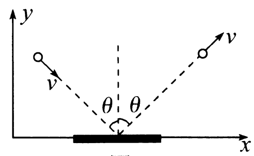


图1

a.分别求出碰撞前后 x、y 方向小球的动量变化 Δp_x、Δp_y；

b.分析说明小球对木板的作用力的方向.

(2)激光束可以看做是粒子流，其中的粒子以相同的动量沿光传播方向运动.激光照射到物体上，在发生反射、折射和吸收现象的同时，也会对物体产生作用.光镊效应就是一个实例，激光束可以像镊子一样抓住细胞等微小颗粒.一束激光经 S 点后被分成若干细光束，若不考虑光的反射和吸收，其中光束①和②穿过介质小球的光路如图 2 所示.图中 O 点是介质小球的球心，入射时光束①和②与 SO 的夹角均为 θ，出射时光束均与 SO 平行.请在下面两种情况下，分析说明两光束因折射对小球产生的合力的方向.

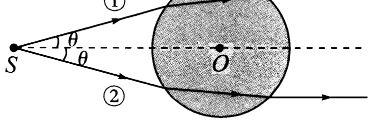


图2

a.光束①和②强度相同；

b.光束①比②强度大.

●解析

(1)a. x 方向:动量变化为 $\Delta p_x = mv\sin\theta - mv\sin\theta = 0$

y 方向:动量变化为 $\Delta p_y = mv\cos\theta - (-mv\cos\theta) = 2mv\cos\theta$,方向沿 y 轴正方向.

b. 根据动量定理可知,木板对小球作用力的方向沿 y 轴正方向;根据牛顿第三定律可知,小球对木板作用力的方向沿 y 轴负方向.

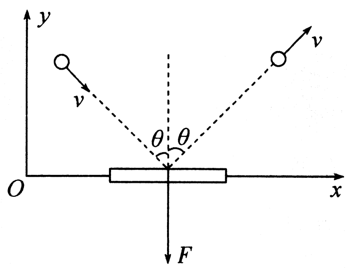


图 3

(2)**解法 1:整体分析法**

a. 仅考虑光的折射,设 Δt 时间内每束光穿过小球的粒子数为 n,每个粒子动量的大小为 p.

这些粒子进入小球前的总动量为 $p_1 = 2np\cos\theta$

从小球出射时的总动量为 $p_2 = 2np$

p_1、p_2 的方向均沿 SO 向右

根据动量定理 $F\Delta t = p_2 - p_1 = 2np(1-\cos\theta) > 0$

可知,小球对这些粒子的作用力 F 的方向沿 SO 向右;根据牛顿第三定律,两光束对小球的合力的方向沿 SO 向左.

b. 建立如图 4 所示的 Oxy 直角坐标系.

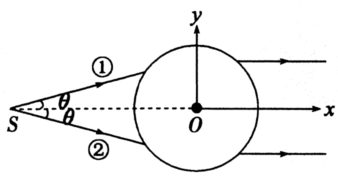


图4

x 方向:

根据(2)a 同理可知,两光束对小球的作用力沿 x 轴负方向.

y 方向:

设 Δt 时间内,光束①穿过小球的粒子数为 n_1,光束②穿过小球的粒子数为 n_2,$n_1 > n_2$.

● 解析

这些粒子进入小球前的总动量为 $p_{1y}=(n_1-n_2)p\sin\theta$

从小球出射时的总动量为 $p_{2y}=0$

根据动量定理：$F_y\Delta t=p_{2y}-p_{1y}=-(n_1-n_2)p\sin\theta$

可知，小球对这些粒子的作用力 F_y 的方向沿 y 轴负方向，根据牛顿第三定律，两光束对小球的作用力沿 y 轴正方向.

所以两光束对小球的合力的方向指向左上方.

解法 2：隔离分析法

分别研究光束①②的动量改变以及两光束因折射对小球产生的力.

a. 两光束强度相同，即动量 $p_1=p_2$，如图 5 所示.

根据对称性结合矢量关系可得动量改变 $\Delta p_1=\Delta p_2$，

球对两束光的作用力 $F_1=F_2$，

根据作用力与反作用力的关系，可得两光束对球的作用力 $F'_1=F'_2$，

考虑对称性，根据矢量合成，可得光束对小球产生的合力方向水平向左.

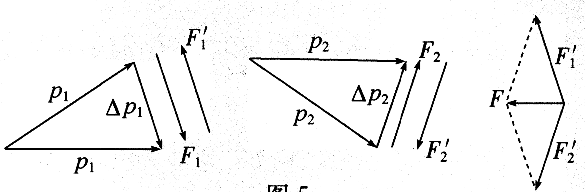


图 5

b. 两光束强度不相同，即动量 $p_1>p_2$，如图 6 所示.

根据对称性结合矢量关系可得动量改变 $\Delta p_1>\Delta p_2$，

球对两束光的作用力 $F_1>F_2$，

根据作用力与反作用力的关系，可得两光束对球的作用力 $F'_1>F'_2$，

考虑对称性，根据矢量合成，可得光束对小球产生的合力方向指向左上方.

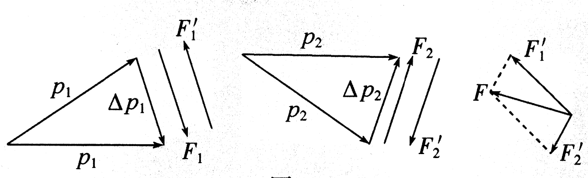


图 6

●解析

解法3:等效类比法

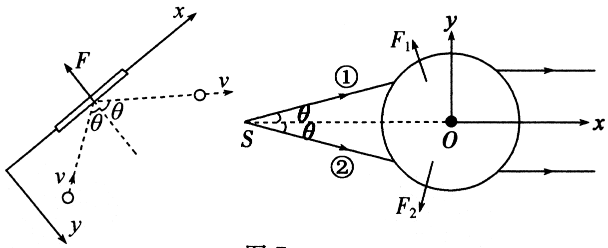


图7

如图7所示,我们将图3旋转一个角度,发现两个问题的相似性,可得光束①②对小球的作用力方向为F_1、F_2,

当两光束强度相同时,F_1、F_2合力的方向沿SO向左;

当光束①比光束②更强时,F_1大于F_2,则F_1、F_2合力的方向指向左上方.

[**感悟方法**]

通过本题的求解,我们灵活运用了模型的建立与迁移的一般方法:等效类比法.

1. **碰撞模型的建立**

本题的本质是"非对心碰撞"问题.在例1中,我们提到了非对心碰撞的问题,具体到本题的第(1)问,等效于小球与木板(质量等效于无穷大)碰撞问题,研究的是碰撞系统内部的相互作用力问题,即小球对木板的作用力,一般应用动量定理来求解.第(2)问,考虑到光具有粒子性的特点,其实考查的实质是微观粒子的碰撞问题,这样就可以把问题转化为我们所熟悉的"碰撞"问题.

2. **模型的迁移应用**

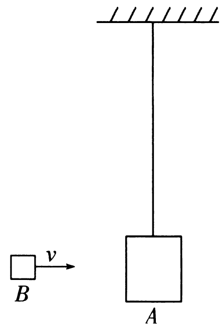
整体法与隔离法均是将"碰撞"模型应用到解决具体的问题中.而将第(1)问中的模型整体等效类比应用到解决到第(2)问中去,是一种创新性的模型迁移方法.

章节练习

1.(2016·**高考全国卷Ⅰ**)某游乐园入口旁有一喷泉,喷出的水柱将一质量为 M 的卡通玩具稳定地悬停在空中.为计算方便起见,假设水柱从横截面积为 S 的喷口持续以速度 v_0 竖直向上喷出;玩具底部为平板(面积略大于 S);水柱冲击到玩具底板后,在竖直方向水的速度变为零,在水平方向朝四周均匀散开.忽略空气阻力.已知水的密度为 ρ,重力加速度大小为 g.求:

(1)喷泉单位时间内喷出的水的质量;

(2)玩具在空中悬停时,其底面相对于喷口的高度.

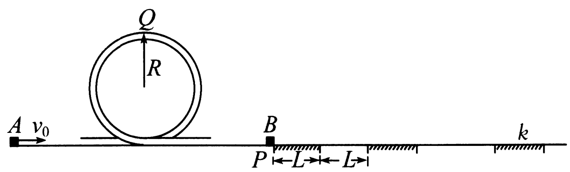


2.(2016·高考海南卷)如图所示,物块 A 通过一不可伸长的轻绳悬挂在天花板下,初始时静止;从发射器(图中未画出)射出的物块 B 沿水平方向与 A 相撞,碰撞后两者粘连在一起运动;碰撞前 B 的速度的大小 v 及碰撞后 A 和 B 一起上升的高度 h 均可由传感器(图中未画出)测得.某同学以 h 为纵坐标,v^2 为横坐标,利用实验数据作直线拟合,求得该直线的斜率为 $k=1.92\times10^{-3}\ \mathrm{s^2/m}$.已知物块 A 和 B 的质量分别为 $m_A=0.400\ \mathrm{kg}$ 和 $m_B=0.100\ \mathrm{kg}$,重力加速度 g 取 $9.80\ \mathrm{m/s^2}$.

(1)若碰撞时间极短且忽略空气阻力,求 h-v^2 直线斜率的理论值 k_0;

(2)求 k 值的相对误差 $\delta\left(\delta=\dfrac{|k-k_0|}{k_0}\times100\%\right.$,结果保留 1 位有效数字$\left.\right)$.

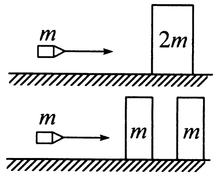
3.(2015·高考广东卷)如图所示,一条带有圆轨道的长轨道水平固定,圆轨道竖直,底端分别与两侧的直轨道相切,半径 $R=0.5$ m. 物块 A 以 $v_0=6$ m/s 的速度滑入圆轨道,滑过最高点 Q,再沿圆轨道滑出后,与直轨上 P 处静止的物块 B 碰撞,碰后粘在一起运动,P 点左侧轨道光滑,右侧轨道呈粗糙段、光滑段交替排列,每段长度都为 $L=0.1$ m. 物块与各粗糙段间的动摩擦因数都为 $\mu=0.1$,A、B 的质量均为 $m=1$ kg(重力加速度 g 取 $10\ m/s^2$;A、B 视为质点,碰撞时间极短).



(1)求 A 滑过 Q 点时的速度大小 v 和受到的弹力大小 F;

(2)若碰后 AB 最终停止在第 k 个粗糙段上,求 k 的数值;

(3)求碰后 AB 滑至第 n 个($n<k$)光滑段上的速度 v_n 与 n 的关系式.

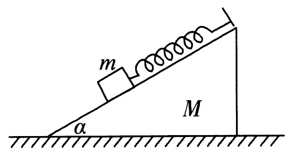


4.(2011·高考全国卷)装甲车和战舰采用多层钢板比采用同样质量的单层钢板更能抵御穿甲弹的射击.通过对以下简化模型的计算可以粗略说明其原因.质量为 $2m$、厚度为 $2d$ 的钢板静止在水平光滑桌面上.质量为 m 的子弹以某一速度垂直射向该钢板,刚好能将钢板射穿.现把钢板分成厚度均为 d、质量均为 m 的相同两块,间隔一段距离平行放置,如图所示.若子弹以相同的速度垂直射向第一块钢板,穿出后再射向第二块钢板,求子弹射入第二块钢板的深度.设子弹在钢板中受到的阻力为恒力,且两块钢板不会发生碰撞.不计重力影响.

第五讲 力学经典之弹簧类问题

典例剖析

【例 1】(2013·高考安徽卷)如图所示,质量为 M、倾角为 α 的斜面体(斜面光滑且足够长)放在粗糙的水平地面上,底部与地面的动摩擦因数为 μ,斜面顶端与劲度系数为 k、自然长度为 L 的轻质弹簧相连,弹簧的另一端连接着质量为 m 的物块. 压缩弹簧使其长度为 $\frac{3L}{4}$ 时将物块由静止开始释放,且物块在以后的运动中,斜面体始终处于静止状态. 重力加速度为 g.



(1)求物块处于平衡位置时弹簧的长度;

(2)选物块的平衡位置为坐标原点,沿斜面向下为正方向建立坐标轴,用 x 表示物块相对于平衡位置的位移,证明物块做简谐运动;

(3)求弹簧的最大伸长量;

(4)为使斜面体始终处于静止状态,动摩擦因数 μ 应满足什么条件(假设滑动摩擦力等于最大静摩擦力)?

解析

(1)设物块在斜面上平衡时,弹簧的伸长量为 ΔL,有 $mg\sin\alpha - k\Delta L = 0$

解得 $\Delta L = \frac{mg\sin\alpha}{k}$

此时弹簧的长度为 $L + \frac{mg\sin\alpha}{k}$.

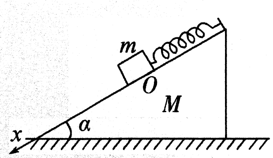


图 1

(2)如图 1 所示,当物块的位移为 x 时,弹簧伸长量为 $x + \Delta L$,物块所受合力为

$F_{合} = mg\sin\alpha - k(x + \Delta L)$

联立以上各式可得 $F_{合} = -kx$,由此可知物块做简谐运动.

解析

(3)物块做简谐运动的振幅为 $A=\frac{L}{4}+\frac{mg\sin\alpha}{k}$

由对称性可知，最大伸长量为 $\frac{L}{4}+\frac{2mg\sin\alpha}{k}$.

(4)**解法 1:隔离法**

设物块位移 x 为正，则斜面体受力情况如图 2 所示，由于斜面体平衡，所以有

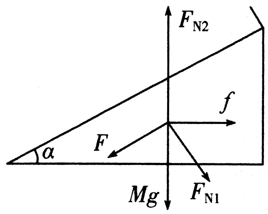


图 2

水平方向 $f+F_{N1}\sin\alpha-F\cos\alpha=0$

竖直方向 $F_{N2}-Mg-F_{N1}\cos\alpha-F\sin\alpha=0$

又 $F=k(x+\Delta L)$，$F_{N1}=mg\cos\alpha$

联立可得 $f=kx\cos\alpha$，

$F_{N2}=Mg+mg+kx\sin\alpha$

为使斜面体始终处于静止，结合牛顿第三定律，应有 $|f|\leqslant\mu F_{N2}$，所以

$$\mu\geqslant\frac{|f|}{F_{N2}}=\frac{k|x|\cos\alpha}{Mg+mg+kx\sin\alpha}.$$

当 $x=-A$ 时，上式右端达到最大值，于是有

$$\mu\geqslant\frac{(kL+4mg\sin\alpha)\cos\alpha}{4Mg+4mg\cos^2\alpha-kL\sin\alpha}.$$

解法 2:整体法

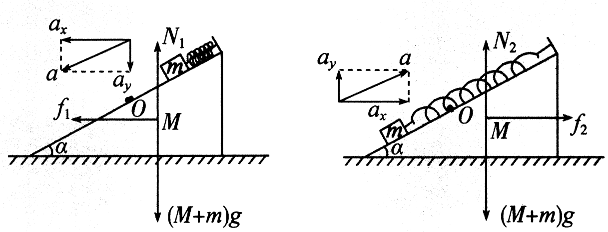


图 3

● 解析

当物块在最大位移处时，将斜面体与物块看成一个整体，受力分析如图 3 所示．同时将加速度进行正交分解，可以得到：

当在最上端最大位移处，水平方向：$f_1=ma\cos\alpha$ ①

竖直方向：$(M+m)g-N_1=ma\sin\alpha$ ②

当在最下端最大位移处，水平方向：$f_2=ma\cos\alpha$ ③

竖直方向：$N_2-(M+m)g=ma\sin\alpha$ ④

要求斜面体保持静止，则 $\mu\geqslant\frac{f}{N}$ ⑤

由⑤式可知，当 f 相等时，N 越大，μ 越小．因此物块在平衡位置上方时需要的动摩擦因数比在下方时大．结合④可知，加速度 a 越大时，N 越大，μ 越小，因此为使斜面始终处于静止状态，只要使得物块在下方最大位移处能保持斜面体静止即可．

物块做简谐运动的振幅为 $A=\frac{L}{4}+\frac{mg\sin\alpha}{k}$

最大加速度 $a=\frac{kA}{m}=g\sin\alpha+\frac{kL}{4m}$ ⑥

由③④⑤⑥可得 $\mu\geqslant\frac{(kL+4mg\sin\alpha)\cos\alpha}{4Mg+4mg\cos^2\alpha-kL\sin\alpha}$．

［**感悟方法**］

本题的求解展现了两方面的能力：连接体类问题的处理方法以及弹簧问题的处理策略．

1. **对于连接体的处理方法一般有整体法与隔离法．**对于加速度不同的连接体，整体法处理时，我们可以运用整体（质点组）牛顿第二定律 $\sum F=m_1a_1+m_2a_2+m_3a_3+\cdots$

2. **对于弹簧问题，我们要把握两个方面的问题**

(1)处理弹簧问题的基本操作

可以归结为 16 个字：凡遇弹簧，必定原长，分清拉压，理清方向．具体地说，遇到弹簧问题，我们首先要确定问题中弹簧的原长位置，其次对于弹簧处于某一状态时，要分清楚弹簧是处于拉伸状态还是压缩状态，同时，务必理清楚在这一状态下与弹簧所连接对象受到弹簧弹力的方向，本题第(1)问的解决过程落实了这些具体的要求．

●解析

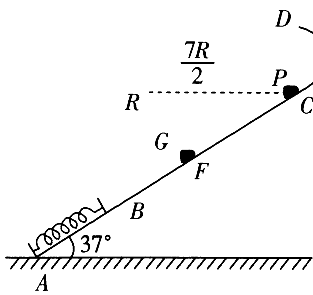
(2)解题过程要体现弹簧的"美"

弹簧的"美"体现在两个方面:"简单美"与"对称美".

"简单美"体现在弹簧的弹力与形变量的关系,即 $F=kx$,正是基于这一点,与弹簧相连接的物体的运动才能是"简谐运动".

"对称美"一般体现在三点:弹簧的伸缩(形变量)关于原长对称;弹簧振子的运动关于平衡位置对称;弹簧的弹簧势能关于原长对称.本题第(4)小题的求解过程,充分运用了弹簧的"对称美".

【例 2】(2016·高考全国卷Ⅰ)如图,一轻弹簧原长为 $2R$,其一端固定在倾角为 $37°$的固定直轨道 AC 的底端 A 处,另一端位于直轨道上 B 处,弹簧处于自然状态.直轨道与一半径为$\frac{5}{6}R$ 的光滑圆弧轨道相切于 C 点,$AC=7R$,A、B、C、D 均在同一竖直平面内.质量为 m 的小物块 P 自 C 点由静止开始下滑,最低到达 E 点(未画出),随后 P 沿轨道被弹回,最高到达 F 点,$AF=4R$,已知 P 与直轨道间的动摩擦因数 $\mu=\frac{1}{4}$,重力加速度大小为 g.(取 $\sin 37°=\frac{3}{5}$,$\cos 37°=\frac{4}{5}$)



(1)求 P 第一次运动到 B 点时速度的大小.

(2)求 P 运动到 E 点时弹簧的弹性势能.

(3)改变物块 P 的质量,将 P 推至 E 点,从静止开始释放.已知 P 自圆弧轨道的最高点 D 处水平飞出后,恰好通过 G 点.G 点在 C 点左下方,与 C 点水平相距$\frac{7}{2}R$、竖直相距 R,求 P 运动到 D 点时速度的大小和改变后 P 的质量.

●解析

(1)**解法 1:应用动能定理求解**

根据题意知,B、C 之间的距离 l 为 $l=7R-2R$ ①

设 P 到达 B 点时的速度为 v_B,由动能定理得 $mgl\sin\theta-\mu mgl\cos\theta=\frac{1}{2}mv_B^2$ ②

式中 $\theta=37°$,联立①②式并由题给条件得 $v_B=2\sqrt{gR}$. ③

解法 2:牛顿运动定律结合运动学规律求解

根据题意知,B、C 之间的距离 l 为 $l=7R-2R$ ④

对物块进行受力分析,由牛顿第二定律有 $mg\sin\theta-\mu mg\cos\theta=ma$ ⑤

解得 $a=g\sin\theta-\mu g\cos\theta=\frac{2}{5}g$ ⑥

式中 $\theta=37°$

物块从 C 到 B 运动的过程,由运动学规律有 $v_B^2=2al$ ⑦

联立各式并由题给条件得 $v_B=2\sqrt{gR}$. ⑧

(2)**解法 1:分阶段动能定理求解**

由(1)已经求得 $v_B=2\sqrt{gR}$ ①

设 $BE=x$,P 到达 E 点时速度为零,设此时弹簧的弹性势能为 E_p.P 由 B 点运动到 E 点的过程中,由动能定理有

$mgx\sin\theta-\mu mgx\cos\theta-E_p=0-\frac{1}{2}mv_B^2$ ②

E、F 之间的距离为 $l_1=4R-2R+x$ ③

P 到达 E 点后反弹,从 E 点运动到 F 点的过程中,由动能定理有

$E_p-mgl_1\sin\theta-\mu mgl_1\cos\theta=0$ ④

联立②③④式并由题给条件得 $x=R$ ⑤

$E_p=\frac{12}{5}mgR$. ⑥

解法 2:全过程动能定理求解

设 $BE=x$,P 到达 E 点时速度为零,P 到达 E 点后反弹,物块 P 从 B 到 E 点然后回到 F 点,由动能定理有

$-mg\cdot 2R\sin\theta-\mu mg\cos\theta\cdot(2x+2R)=0-\frac{1}{2}mv_B^2$ ⑦

可得 $x=R$,代入解法 1 中的②式或④式,可得 $E_p=\frac{12}{5}mgR$. ⑧

● 解析

(3)设改变后 P 的质量为 m_1,D 点与 G 点的水平距离 x_1 和竖直距离 y_1 分别为

$$x_1=\frac{7}{2}R-\frac{5}{6}R\sin\theta \quad ①$$

$$y_1=R+\frac{5}{6}R+\frac{5}{6}R\cos\theta \quad ②$$

式中,已应用了过 C 点的圆轨道半径与竖直方向夹角仍为 θ 的事实.

设 P 在 D 点的速度为 v_D,由 D 点运动到 G 点的时间为 t. 由平抛运动公式有

$$y_1=\frac{1}{2}gt^2 \quad ③$$

$$x_1=v_Dt \quad ④$$

联立①～④式得 $v_D=\frac{3}{5}\sqrt{5gR}$ ⑤

设 P 在 C 点速度的大小为 v_C,在 P 由 C 运动到 D 的过程中机械能守恒,有

$$\frac{1}{2}m_1v_C^2=\frac{1}{2}m_1v_D^2+m_1g\left(\frac{5}{6}R+\frac{5}{6}R\cos\theta\right) \quad ⑥$$

P 由 E 点运动到 C 点的过程中,同理,由动能定理有

$$E_p-m_1g(x+5R)\sin\theta-\mu m_1g(x+5R)\cos\theta=\frac{1}{2}m_1v_C^2 \quad ⑦$$

联立各式得 $m_1=\frac{1}{3}m$. ⑧

[**感悟方法**]

本题涉及两个基本问题的处理:弹性势能的处理与多过程问题的处理.

1. 弹簧弹性势能的处理

弹簧的弹性势能的公式为 $E_p=\frac{1}{2}kx^2$,其中 x 为弹簧的形变量. 但是在具体的高考范围问题中,却很少用到这个公式来处理,常用的处理方法是“消元法”,具体的做法有两种

(1)利用弹簧弹性势能的对称性. 弹簧的弹性势能关于原长对称,所以往往可以选取关于弹簧原长对称的两个位置的物理过程,从而使得弹性势能初末状态相等,实现“相消”.

(2)利用弹簧在同一形变量弹性势能相等的特点,比如本题从第(2)小题到第(3)小题,虽然改变了物块 P 的质量,但弹簧的形变相同,所以弹性势能也相同,实现“相消”的效果.

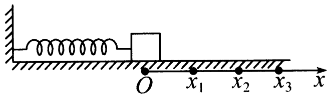
● 解析

2. **多过程问题的处理**

对于多过程问题，我们处理的基本策略是：过程分段，按需整合. 具体地说就是将一个长过程分成多个“子过程”，按照需要分段选取某个过程或是某几个过程甚至是整个过程. 其选择的策略主要是将待求的物理量与具体的物理过程相对接，考虑所选择的物理规律. 本题第(3)小题，求 P 的质量采用了两种方法，体现了动能定理在处理多过程问题中的优势.

章节练习

1.(2015 · 高考北京卷)如图所示，弹簧的一端固定，另一端连接一个物块，弹簧质量不计. 物块(可视为质点)的质量为 m，在水平桌面上沿 x 轴运动，与桌面间的动摩擦因数为 μ. 以弹簧原长时物块的位置为坐标原点 O，当弹簧的伸长量为 x 时，物块所受弹簧弹力大小为 $F=kx$，k 为常量.



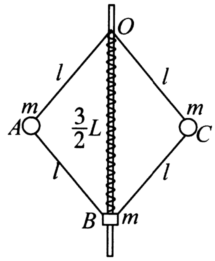
(1)请画出 F 随 x 变化的示意图；并根据 F-x 图象求物块沿 x 轴从 O 点运动到位置 x 的过程中弹力所做的功.

(2)物块由 x_1 向右运动到 x_3，然后由 x_3 返回到 x_2，在这个过程中，

a. 求弹力所做的功，并据此求弹性势能的变化量.

b. 求滑动摩擦力所做的功；并与弹力做功比较，说明为什么不存在与摩擦力对应的“摩擦力势能”的概念.

2.(2015·高考江苏卷)一转动装置如图所示,四根轻杆 OA、OC、AB 和 CB 与两小球及一小环通过铰链连接,轻杆长均为 l,球和环的质量均为 m,O 端固定在竖直的轻质转轴上.套在转轴上的轻质弹簧连接在 O 与小环之间,原长为 L.装置静止时,弹簧长为 $\frac{3}{2}L$.转动该装置并缓慢增大转速,小环缓慢上升.弹簧始终在弹性限度内,忽略一切摩擦和空气阻力,重力加速度为 g.求:

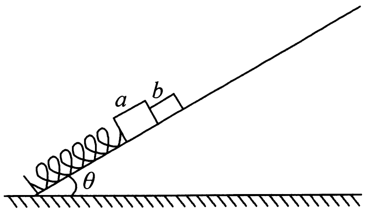


(1)弹簧的劲度系数 k;

(2)AB 杆中弹力为零时,装置转动的角速度 ω_0;

(3)弹簧长度从 $\frac{3}{2}L$ 缓慢缩短为 $\frac{1}{2}L$ 的过程中,外界对转动装置所做的功 W.

3.(2017·高考海南卷)一轻弹簧的一端固定在倾角为θ的固定光滑斜面的底部,另一端和质量为m的小物块a相连,如图所示.质量为$\frac{3}{5}m$的小物块b紧靠a静止在斜面上,此时弹簧的压缩量为x_0,从$t=0$时开始,对b施加沿斜面向上的外力,使b始终做匀加速直线运动.经过一段时间后,物块a、b分离;再经过同样长的时间,b距其出发点的距离恰好也为x_0.弹簧的形变始终在弹性限度内,重力加速度大小为g.求:

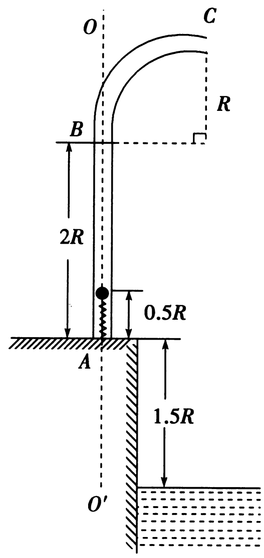


(1)弹簧的劲度系数;

(2)物块b加速度的大小;

(3)在物块a、b分离前,外力大小随时间变化的关系式.

4.(2011·高考福建卷)如图为某种鱼饵自动投放器中的投饵管装置示意图,其下半部 AB 是一长为 $2R$ 的竖直细管,上半部 BC 是半径为 R 的四分之一圆弧弯管,管口沿水平方向,AB 管内有一原长为 R、下端固定的轻质弹簧.投饵时,每次总将弹簧长度压缩到 $0.5R$ 后锁定,在弹簧上端放置一粒鱼饵,解除锁定,弹簧可将鱼饵弹射出去.设质量为 m 的鱼饵到达管口 C 时,对管壁的作用力恰好为零.不计鱼饵在运动过程中的机械能损失,且锁定和解除锁定时,均不改变弹簧的弹性势能.已知重力加速度为 g.求:



(1)质量为 m 的鱼饵到达管口 C 时的速度大小 v_1;

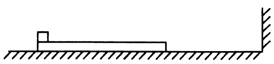
(2)弹簧压缩到 $0.5R$ 时的弹性势能 E_p;

(3)已知地面与水面相距 $1.5R$,若使该投饵管绕 AB 管的中轴线 OO' 在 $90°$ 角的范围内来回缓慢转动,每次弹射时只放置一粒鱼饵,鱼饵的质量在 $\frac{2}{3}m$ 到 m 之间变化,且均能落到水面.持续投放足够长时间后,鱼饵能够落到水面的最大面积 S 是多少?

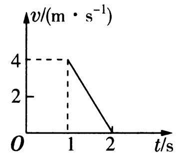
第六讲 力学经典之板块类问题

典例剖析

【例 1】(2015 · 高考全国卷Ⅰ)一长木板置于粗糙水平地面上,木板左端放置一小物块;在木板右方有一墙壁,木板右端与墙壁的距离为 4.5 m,如图甲所示. $t=0$ 时刻开始,小物块与木板一起以共同速度向右运动,直至 $t=1$ s 时木板与墙壁碰撞(碰撞时间极短). 碰撞前后木板速度大小不变,方向相反;运动过程中小物块始终未离开木板. 已知碰撞后 1 s 时间内小物块的 $v-t$ 图线如图乙所示. 木板的质量是小物块质量的 15 倍,重力加速度大小 g 取 10 m/s^2. 求:



图甲



图乙

(1)木板与地面间的动摩擦因数 μ_1 及小物块与木板间的动摩擦因数 μ_2;

(2)木板的最小长度;

(3)木板右端离墙壁的最终距离.

• 解析

解法 1:运用牛顿运动定律结合运动学规律求解

(1)规定向右为正方向. 木板与墙壁相碰前,小物块和木板一起向右做匀变速运动,设加速度为 a_1,小物块和木板的质量分别为 m 和 M. 由牛顿第二定律有

$$-\mu_1(m+M)g=(m+M)a_1 \quad ①$$

由题图乙可知,木板与墙壁碰前瞬间速度 $v_1=4$ m/s,由运动学公式得

$$v_1=v_0+a_1t_1 \quad ②$$

$$s_0=v_0t_1+\frac{1}{2}a_1t_1^2 \quad ③$$

式中,$t_1=1$ s,$s_0=4.5$ m 是木板碰前的位移,v_0 是小物块和木板开始运动时的速度.

解析

联立①②③式和题给条件得 $\mu_1=0.1, a_1=1\ \text{m/s}^2$ ④

在木板与墙壁碰撞后，木板以 $-v_1$ 的初速度向左做匀变速运动，小物块以 v_1 的初速度向右做匀变速运动. 设小物块的加速度为 a_2，由牛顿第二定律有

$-\mu_2 mg=ma_2$ ⑤

由题图乙可得 $a_2=\dfrac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=4\ \text{m/s}^2$，方向水平向左 ⑥

式中，$t_2=2\ \text{s}, v_2=0$，联立⑤⑥式和题给条件得 $\mu_2=0.4$. ⑦

(2)设碰撞后木板的加速度为 a_3，经过时间 Δt，木板和小物块刚好具有共同速度 v_3. 由牛顿第二定律及运动学公式得

$\mu_2 mg+\mu_1(M+m)g=Ma_3$ ⑧

可得 $a_3=\dfrac{4}{3}\ \text{m/s}^2$

$v_3=-v_1+a_3\Delta t$ ⑨

$v_3=v_1+a_2\Delta t$ ⑩

接下来，我们可以用两种方法来处理：

方法一：以地面为参考系

碰撞后至木板和小物块刚好达到共同速度的过程中，木板运动的位移为

$s_1=\dfrac{-v_1+v_3}{2}\Delta t$ ⑪

小物块运动的位移为 $s_2=\dfrac{v_1+v_3}{2}\Delta t$ ⑫

小物块相对木板的位移为 $\Delta s=s_2-s_1$ ⑬

联立④⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬式，并代入数值得 $\Delta s=6.0\ \text{m}$. ⑭

方法二：以木板为参考系

小物块相对于木板的初速度为 $v_{相对}=(4+4)\ \text{m/s}=8\ \text{m/s}$，方向水平向右；相对末速度为零；相对加速度 $a_{相对}=a_2+a_3=\left(4+\dfrac{4}{3}\right)\ \text{m/s}^2$，方向水平向左. 由运动学公式有

● 解析

相对位移 $\Delta s=\dfrac{v_{相对}^2}{2a_{相对}}=6.0\ \text{m}$

因为运动过程中小物块没有脱离木板，所以木板的最小长度应为 6.0 m.

(3) 在小物块和木板具有共同速度后，两者向左做匀变速运动直至停止，设加速度为 a_4，此过程中小物块和木板运动的位移 s_3. 由牛顿第二定律及运动学公式得

$\mu_1(m+M)g=(m+M)a_4$ ⑮

$0-v_3^2=2a_4s_3$ ⑯

碰后木板运动的位移为 $s=s_1+s_3$ ⑰

联立④⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑮⑯⑰式，

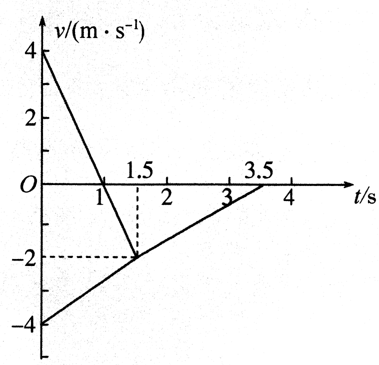
并代入数值得 $s=-6.5\ \text{m}$ ⑱

木板右端离墙壁的最终距离为 6.5 m.

对于第(2)(3)小题，还可以有两种常用的解法：

解法 2：运用图象法求解

(2) 由⑨⑩式可得 $\Delta t=1.5\ \text{s}$，$v_3=2\ \text{m/s}$，方向水平向左. 作出木板碰墙后，小物块与木板的"速度—时间"图象，如图所示.



根据图象可知小物块和木板的相对位移 $\Delta s=\dfrac{1}{2}\times 8\times 1.5\ \text{m}=6.0\ \text{m}$

因为运动过程中小物块没有脱离木板，所以木板的最小长度应为 6.0 m.

●解析

(3)在小物块和木板具有共同速度后,两者向左做匀变速运动直至停止,设加速度为 a_4,减速至零的时间为 t_3,由牛顿第二定律有 $\mu_1(m+M)g=(m+M)a_4$

可得 $a_4=1\ \text{m/s}^2$

由运动学公式可得 $t_3=\dfrac{v_3}{a_4}=2\ \text{s}$

作出图象,如图所示,根据图象可知,木板右端离墙壁的最终距离为

$s=\dfrac{1}{2}\times(2+4)\times1.5\ \text{m}+\dfrac{1}{2}\times2\times2\ \text{m}=6.5\ \text{m}$.

解法 3:运用动能定理与能量守恒求解

(2)从木板碰撞墙壁到小物块与木板速度达到相同,根据动能定理有

对小物块:$-\mu_2 mgs_1=\dfrac{1}{2}mv_3^2-\dfrac{1}{2}mv_1^2$

解得 $s_1=1.5\ \text{m}$

对木板:$-\mu_2 mgs_2-\mu_1(M+m)gs_2=\dfrac{1}{2}Mv_3^2-\dfrac{1}{2}Mv_1^2$

解得 $s_2=4.5\ \text{m}$

相对位移 $\Delta s=s_1+s_2=6.0\ \text{m}$

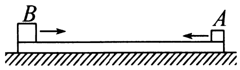
因为运动过程中小物块没有脱离木板,所以木板的最小长度应为 6.0 m.

(3)从木板碰撞墙壁到最后停止的过程,对小物块与木板系统进行研究,根据能的转化与守恒可知,碰撞墙壁前系统的总动能转化为系统内部因一对滑动摩擦力做功产生的内能以及长木板与地面摩擦产生的热能,因此有

$\dfrac{1}{2}(M+m)v_1^2=\mu_2 mg\Delta s+\mu_1(M+m)gs$

可得 $s=6.5\ \text{m}$.

【例 2】(2017·高考全国卷Ⅲ)如图，两个滑块 A 和 B 的质量分别为 $m_A=1$ kg 和 $m_B=5$ kg，放在静止于水平地面上的木板的两端，两者与木板间的动摩擦因数均为 $\mu_1=0.5$；木板的质量为 $m=4$ kg，与地面间的动摩擦因数为 $\mu_2=0.1$. 某时刻 A、B 两滑块开始相向滑动，初速度大小均为 $v_0=3$ m/s. A、B 相遇时，A 与木板恰好相对静止. 设最大静摩擦力等于滑动摩擦力，取重力加速度大小 $g=10$ m/s^2. 求：



(1)B 与木板相对静止时，木板的速度；

(2)A、B 开始运动时，两者之间的距离.

●解析

(1)滑块 A 和 B 在木板上滑动时，木板也在地面上滑动. 设 A、B 和木板所受的摩擦力大小分别为 f_1、f_2 和 f_3，A 和 B 相对于地面的加速度大小分别为 a_A 和 a_B，木板相对于地面的加速度大小为 a_1. 在物块 B 与木板达到共同速度前有

$f_1=\mu_1 m_A g$ ①

$f_2=\mu_1 m_B g$ ②

$f_3=\mu_2(m+m_A+m_B)g$ ③

由牛顿第二定律得

$f_1=m_A a_A$ ④

$f_2=m_B a_B$ ⑤

$f_2-f_1-f_3=ma_1$ ⑥

设在 t_1 时刻，B 与木板达到共同速度，其大小为 v_1. 由运动学公式有

$v_1=v_0-a_B t_1$ ⑦

$v_1=a_1 t_1$ ⑧

联立①②③④⑤⑥⑦⑧式，

代入已知数据得 $v_1=1$ m/s. ⑨

●解析

(2)**解法 1:运用牛顿运动定律结合运动学规律求解**

在 t_1 时间间隔内,B 相对于地面移动的距离为 $s_B=v_0t_1-\frac{1}{2}a_Bt_1^2$ ⑩

设在 B 与木板达到共同速度 v_1 后,木板的加速度大小为 a_2,对于 B 与木板组成的体系,由牛顿第二定律有 $f_1+f_3=(m_B+m)a_2$ ⑪

由①②④⑤式知,$a_A=a_B$;再由⑦⑧式知,B 与木板达到共同速度时,A 的速度大小也为 v_1,但运动方向与木板相反.由题意知,A 和 B 相遇时,A 与木板的速度相同,设其大小为 v_2.设 A 的速度大小从 v_1 变到 v_2 所用的时间为 t_2,则由运动学公式,对木板有

$v_2=v_1-a_2t_2$ ⑫

对 A 有 $v_2=-v_1+a_At_2$ ⑬

在 t_2 时间间隔内,B(以及木板)相对地面移动的距离为

$s_1=v_1t_2-\frac{1}{2}a_2t_2^2$ ⑭

在(t_1+t_2)时间间隔内,A 相对地面移动的距离为

$s_A=v_0(t_1+t_2)-\frac{1}{2}a_A(t_1+t_2)^2$ ⑮

A 和 B 相遇时,A 与木板的速度也恰好相同,因此 A 和 B 开始运动时,两者之间的距离为 $s_0=s_A+s_1+s_B$ ⑯

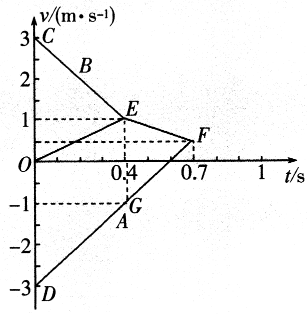
联立以上各式,并代入数据得 $s_0=1.9\ \text{m}$. ⑰

解法 2:运用图象法求解

可以求出 A、B 减速运动时 $a_A=5\ \text{m/s}^2$,$a_B=5\ \text{m/s}^2$;木板加速的加速度 $a_1=2.5\ \text{m/s}^2$;B 与木板共速后一起减速的加速度 $a_2=\frac{5}{3}\ \text{m/s}^2$.$B$ 减速与木板加速达到相同速度所需要时间 $t_1=0.4\ \text{s}$;B 与木板整体减速和物块 A 先减速后加速到共同速度时间 $t_2=0.3\ \text{s}$.

● 解析

设定向右方向为正方向，作出三个物体的 v-t 图象，如图所示.



可以得到“A、B 开始运动时，两者之间的距离”就等于四边形 $CEFD$ 所围成的面积，因此

$$s_0=\frac{EG+CD}{2}\cdot t_1+\frac{1}{2}EG\cdot t_2=1.9\ \text{m}.$$

［**感悟方法**］

“板块”问题就是通常遇到的叠放问题，由于其往往可看成由物块和木板构成的一对相互作用模型，故将其形象称为“板块”问题. 其应用的知识面较为广泛，与运动学、受力分析、动力学、功与能等有着密切联系，而且往往牵涉着临界极值问题.

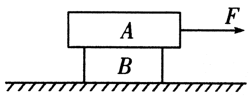
在处理“板块”问题中，我们往往会遇到以下几个基本问题：

常见基本问题	处理方法
分析物体所受的摩擦力（动力、阻力）	根据物块与木板的相对运动方向来判断，摩擦力的突变时刻：$v_{物}$ 与 $v_{板}$ 相同时
板、块能一起加速运动的最大加速度	板、块间达到最大静摩擦力时
相对位移的计算	弄清对地位移和相对位移的概念是前提. 可先由运动学公式求出某段时间内物体与传送带的对地位移，然后用“快”的减去“慢”的就是差距. 也可应用图象法或相对运动法进行求解
物块不从木板上掉下去的条件	物块与木板保持相对静止时物块还在木板上，弄清达到临界状态的时间和位移关系

●解析

对于板、块能一起加速运动的最大加速度问题，是一个易错问题，下面我们通过对一个问题的处理加以讨论：

如图所示，长方体物块 A 叠放在长方体物块 B 上，B 置于光滑水平面上，A、B 质量分别为 $m_A=6$ kg，$m_B=2$ kg，A、B 之间动摩擦因数 $\mu=0.2$，开始时 $F=10$ N，此后逐渐增加，在增大到 45 N 的过程中，则 （　　）



A. 当拉力 $F<12$ N 时，两物块均保持静止状态

B. 两物块间从受力开始就有相对运动

C. 两物块开始没有相对运动，当拉力超过 12 N 时，开始相对滑动

D. 两物块间始终没有相对运动，但 AB 间存在静摩擦力，其中 A 对 B 的静摩擦力水平向右

我们往往会犯这样的错误：物块和木板相对滑动时，由于受到平衡思想的影响，认为拉力和滑动摩擦力一样大，进而导致了错误，就本题而言，很多人会选择 C 选项.

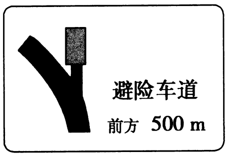
正确分析：隔离对 B 分析，当 AB 间摩擦力达到最大静摩擦力时，A、B 发生相对滑动，则 $a_B=\dfrac{\mu m_A g}{m_B}=\dfrac{0.2\times6\times10}{2}$ $\text{m/s}^2=6$ m/s^2；

再对整体分析 $F=(m_A+m_B)a=8\times6$ N$=48$ N，知当拉力达到 48 N 时，A、B 才发生相对滑动，由于地面光滑，只要有拉力两物体就一起运动.

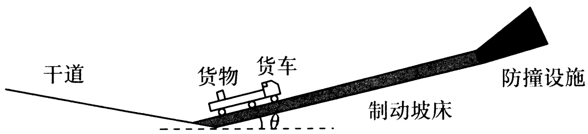
正确答案：D

章节练习

1.(2016·高考四川卷)避险车道(标志如图甲所示)是避免恶性交通事故的重要设施,由制动坡床和防撞设施等组成,如图乙所示的竖直平面内,制动坡床视为水平面夹角为 θ 的斜面.一辆长 12 m 的载有货物的货车因刹车失灵从干道驶入制动坡床,当车速为 23 m/s 时,车尾位于制动坡床的底端,货物开始在车厢内向车头滑动,当货物在车厢内滑动了 4 m 时,车头距制动坡床顶端 38 m,再过一段时间,货车停止.已知货车质量是货物质量的 4 倍,货物与车厢间的动摩擦因数为 0.4;货车在制动坡床上运动受到的坡床阻力大小为货车和货物总重的 0.44 倍.货物与货车分别视为小滑块和平板,取 $\cos\theta=1$,$\sin\theta=0.1$,g 取 $10\ m/s^2$.求:



图甲

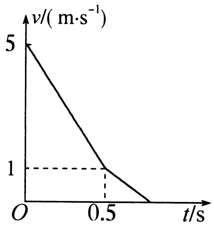


图乙

(1)货物在车厢内滑动时加速度的大小和方向;

(2)制动坡床的长度.

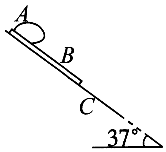
2.(2013·高考全国卷Ⅱ)一长木板在水平地面上运动,在 $t=0$ 时刻将一相对于地面静止的物块轻放到木板上,以后木板运动的速度一时间图象如图所示.已知物块与木板的质量相等,物块与木板间及木板与地面间均有摩擦,物块与木板间的最大静摩擦力等于滑动摩擦力,且物块始终在木板上.取重力加速度的大小 $g=10\ m/s^2$,求:



(1)物块与木板间、木板与地面间的动摩擦因数;

(2)从 $t=0$ 时刻到物块与木板均停止运动时,物块相对于木板的位移的大小.

3.(2015·高考全国卷Ⅱ)下暴雨时，有时会发生山体滑坡或泥石流等地质灾害.某地有一倾角为$\theta=37^\circ\left(\sin 37^\circ=\frac{3}{5}\right)$的山坡$C$，上面有一质量为$m$的石板$B$，其上下表面与斜坡平行；$B$上有一碎石堆$A$(含有大量泥土)，$A$和$B$均处于静止状态，如图所示.假设某次暴雨中，$A$浸透雨水后总质量也为$m$(可视为质量不变的滑块)，在极短时间内，$A$、$B$间的动摩擦因数$\mu_1$减小为$\frac{3}{8}$，$B$、$C$间的动摩擦因数$\mu_2$减小为0.5，$A$、$B$开始运动，此时刻为计时起点；在第2 s末，$B$的上表面突然变为光滑，$\mu_2$保持不变.已知$A$开始运动时，$A$离$B$下边缘的距离$l=27$ m，C足够长，设最大静摩擦力等于滑动摩擦力.取重力加速度大小$g=10\ \text{m/s}^2$.求：



(1)在0～2 s时间内A和B加速度的大小；

(2)A在B上总的运动时间.

4.(2010·高考海南卷)如图1中,质量为 m 的物块叠放在质量为 $2m$ 的足够长的木板上方右侧,木板放在光滑的水平地面上,物块与木板之间的动摩擦因数为 $\mu=0.2$.在木板上施加一水平向右的拉力 F,在 0~3 s 内 F 的变化如图2所示,图中 F 以 mg 为单位,重力加速度 g 取 10 m/s^2.整个系统开始时静止.

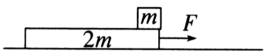


图1

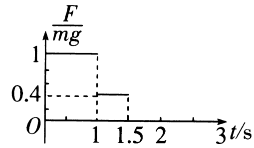


图2

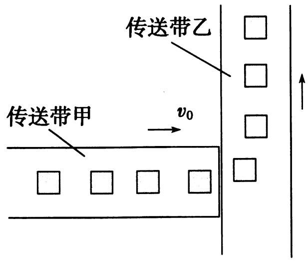
(1)求 1 s、1.5 s、2 s、3 s 末木板的速度以及 2 s、3 s 末物块的速度;

(2)在同一坐标系中画出 0~3 s 内木板和物块的 v-t 图象,据此求 0~3 s 内物块相对于木板滑过的距离.

第七讲 力学经典之传送带问题

典例剖析

【例 1】(2014·高考江苏卷)如图所示,生产车间有两个相互垂直且等高的水平传送带甲和乙,甲的速度为 v_0.小工件离开甲前与甲的速度相同,并平稳地传到乙上,工件与乙之间的动摩擦因数为 μ.乙的宽度足够大,重力加速度为 g.



(1)若乙的速度为 v_0,求工件在乙上侧向(垂直于乙的运动方向)滑过的距离 s;

(2)若乙的速度为 $2v_0$,求工件在乙上刚停止侧向滑动时的速度大小 v;

(3)保持乙的速度 $2v_0$ 不变,当工件在乙上刚停止滑动时,下一只工件恰好传到乙上,如此反复.若每个工件的质量均为 m,除工件与传送带之间摩擦外,其他能量损耗均不计,求驱动乙的电动机的平均输出功率 $\overline{P}$.

解析

(1)设 $t=0$ 时刻摩擦力与侧向的夹角为 θ,侧向、纵向加速度的大小分别为 a_x、a_y

则 $\dfrac{a_y}{a_x}=\tan\theta$

很小的 Δt 时间内,侧向、纵向的速度增量

$\Delta v_x=a_x\Delta t$,

$\Delta v_y=a_y\Delta t$

解得 $\dfrac{\Delta v_y}{\Delta v_x}=\tan\theta$

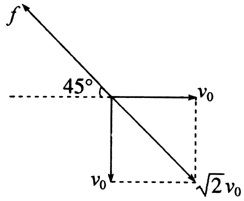
且由题意知 $\tan\theta=\dfrac{v_y}{v_x}$

则 $\dfrac{v'_y}{v'_x}=\dfrac{v_y-\Delta v_y}{v_x-\Delta v_x}=\tan\theta$

●解析

所以摩擦力方向保持不变，因此，工件在传送带乙上侧向加速度的分量保持不变.

当传送带乙的速度为 v_0 时，摩擦力与侧向的夹角为 45°，如图所示. 可得



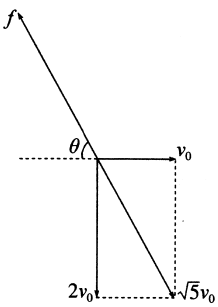
侧向加速度大小 $a_x=\mu g\cos 45°$

根据匀变速直线运动规律有 $-2a_xs=0-v_0^2$

解得 $s=\dfrac{\sqrt{2}v_0^2}{2\mu g}$.

(2)以传送带乙为参考系，工件的速度与受到的摩擦力的情况如图所示.

由 $\dfrac{v'_y}{v'_x}=\dfrac{v_y-\Delta v_y}{v_x-\Delta v_x}=\tan\theta$，可知 $v'_y=v'_x\tan\theta$，则当 $v'_x=0$ 时，$v'_y=0$，这说明当侧向停止时，工件相对于传送带乙的速度为零，即与乙的速度相同，即 $v=2v_0$.



(3)**解法 1：运用能量守恒求解**

工件在乙上滑动时侧向位移为 x，沿乙运动的方向的位移为 y，

由题意知 $a_x=\mu g\cos\theta, a_y=\mu g\sin\theta$

在侧向上 $-2a_xx=0-v_0^2$

在纵向上 $2a_yy=(2v_0)^2-0$

工件滑动时间 $t=\dfrac{2v_0}{a_y}$

●解析

乙前进的距离 $y_1=2v_0t$

工件相对乙的位移 $L=\sqrt{x^2+(y_1-y)^2}$

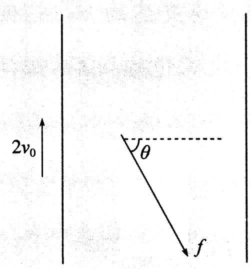
则系统摩擦生热 $Q=\mu mgL$

电动机做功 $W=\frac{1}{2}m(2v_0)^2-\frac{1}{2}mv_0^2+Q$

由$\overline{P}=\frac{W}{t}$，解得$\overline{P}=\frac{4\sqrt{5}\mu mgv_0}{5}$.

解法 2：运用功能原理求解

若以传送带乙为研究对象，受到的摩擦力情况如图所示.



要传送带乙速度保持不变，则驱动乙的电动机的输出功率必等于传送带乙克服摩擦力做功的功率，有$\overline{P}=\mu mg\cdot 2v_0\sin\theta$

由几何关系可得 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

可解得$\overline{P}=\frac{4\sqrt{5}\mu mgv_0}{5}$.

[**感悟方法**]

本题的求解，需要处理好两个问题：相对运动问题和电动机输出能量问题.

1. **相对运动问题**

工件在传送带乙上的运动情况，如果从地面上去看相对比较复杂，但如果转化为相对于传送带乙去看，问题就会变得简单. 在判断一个物体相对另一个物体做什么运动时，我们要求出相对速度与相对加速度，要用到公式：

$v_{A对B}=v_{A对C}+v_{C对B}$，$a_{A对B}=a_{A对C}+a_{C对B}$，$x_{A对B}=x_{A对C}+x_{C对B}$

● 解析

2. 电动机输出能量

求解电动机输出的能量问题，我们往往可以用两种方法来思考：

一是电动机输出的能量最终会转化为哪些能量？即用能量的转化与守恒来求解；

二是电动机输出的能量转化为其他形式的能是通过什么力做功实现的？即用功能原理的观点来求解.

【例 2】(2006 · 高考全国卷)一水平的浅色长传送带上放置一煤块(可视为质点)，煤块与传送带之间的动摩擦因数为 μ. 初始时，传送带与煤块都是静止的. 现让传送带以恒定的加速度 a_0 开始运动，当其速度达到 v_0 后，便以此速度做匀速运动. 经过一段时间，煤块在传送带上留下了一段黑色痕迹后，煤块相对于传送带不再滑动. 求此黑色痕迹的长度.

● 解析

解法 1：牛顿运动定律结合运动学规律

根据“传送带上有黑色痕迹”可知，煤块与传送带之间发生了相对运动，煤块的加速度 a 小于传送带的加速度 a_0. 根据牛顿运动定律，可得 $a=\mu g$ ①

设经历时间 t_1，传送带由静止开始加速到速度等于 v_0，煤块则由静止加速到 v，有：

$v_0=a_0t_1$ ②

$v=at_1$ ③

由于 $a<a_0$，故 $v<v_0$，煤块继续受到滑动摩擦力的作用. 再经过时间 t'，煤块的速度由 v 增加到 v_0，有：$v_0=v+at'$ ④

设在煤块的速度从 0 增加到 v_0 的整个过程中，传送带和煤块位移分别为 s_0 和 s，有：

$s_0=\frac{1}{2}a_0t_1^2+v_0t'$ ⑤

$s=\frac{v_0^2}{2a}$ ⑥

●解析

传送带上留下的黑色痕迹的长度

$l=s_0-s$ ⑦

综合上述各式，可解得 $l=\frac{v_0}{2}\left(\frac{v_0}{\mu g}-\frac{v_0}{a_0}\right)$

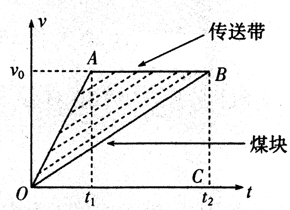
解法 2：运用图象法求解

煤块的加速度：$a=\mu g$ ①

煤块加速到 v_0 的时间：$t_2=\frac{v_0}{a}$ ②

传送皮带加速到 v_0 的时间：$t_1=\frac{v_0}{a_0}$ ③

由此可得煤块与传送带运动过程的 v-t 图象如图所示：



黑色痕迹的长度可用图中阴影部分的面积计算得到：

$l=\frac{1}{2}v_0(t_2-t_1)$ ④

解得 $l=\frac{v_0}{2}\left(\frac{v_0}{\mu g}-\frac{v_0}{a_0}\right)$. ⑤

解法 3：运用相对运动求解

以传送带为参照物，煤块相对于传送带向后先做匀加速运动再做匀减速运动：

匀加速阶段：相对加速度大小：$a_1=a_0-\mu g$ ①

相对初速度：$v'_0=0$

加速时间：$t_1=\frac{v_0}{a_0}$ ②

相对位移：$s_1=\frac{1}{2}a_1t_1^2$ ③

匀减速阶段：相对加速度大小：$a_2=\mu g$ ④

相对末速度：$v_t=0$

●解析

设减速时间为 t_2

则有：$t_1+t_2=\frac{v_0}{a_2}$ ⑤

相对位移：$s_2=\frac{1}{2}a_2t_2^2$ ⑥

黑色痕迹长度：$l=s_1+s_2$ ⑦

综合以上各式得：$l=\frac{v_0^2(a_0-\mu g)}{2\mu g a_0}$. ⑧

[**感悟方法**]

有关物块相对于传送带运动的问题中，相对位移、相对路程、痕迹长度这三个概念比较容易混淆，在此做一具体说明：

以传送带为参考系，以连续两次相对运动为例，设两次相对位移分别为 Δx_1、Δx_2

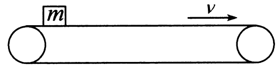
(1)若 Δx_1 与 Δx_2 的方向相同，则总的相对位移大小 $\Delta x=\Delta x_1+\Delta x_2$，相对路程 $\Delta s=\Delta x_1+\Delta x_2$，痕迹长度 $l=\Delta x_1+\Delta x_2$；

(2)若 Δx_1 与 Δx_2 的方向相反，即有“返回”现象，则总的相对位移大小 $\Delta x=|\Delta x_1-\Delta x_2|$，相对路程 $\Delta s=\Delta x_1+\Delta x_2$，痕迹长度 $l=\Delta x_1(\Delta x_1>\Delta x_2)$或是 $l=\Delta x_2(\Delta x_1<\Delta x_2)$.

值得注意的是，相对运动产生的系统内能 $Q=\mu mg\cdot x$，式子中的 x 确切的含义是“相对路程”.

章节练习

1.(2015·高考天津卷)某快递公司分拣邮件的水平传输装置示意如图,皮带在电动机的带动下保持 $v=1$ m/s 的恒定速度向右运动,现将一质量为 $m=2$ kg 的邮件轻放在皮带上,邮件和皮带间的动摩擦因数 $\mu=0.5$.设皮带足够长,取 $g=10$ m/s^2,在邮件与皮带发生相对滑动的过程中,求:

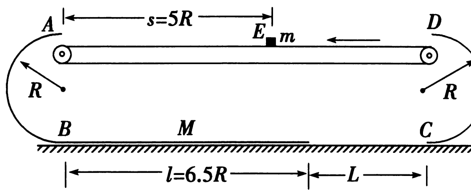


(1)邮件滑动的时间 t;

(2)邮件对地的位移大小 x;

(3)邮件与皮带间的摩擦力对皮带做的功 W.

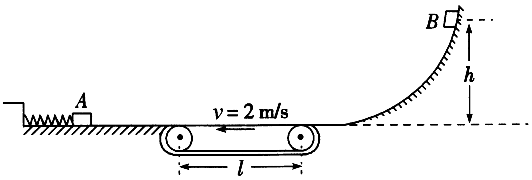
2.(2011·高考广东卷)如图所示，以 A、B 和 C、D 为端点的两半圆形光滑轨道固定于竖直平面内，一滑板静止在光滑水平地面上，左端紧靠 B 点，上表面所在平面与两半圆分别相切于 B、C. 一物块被轻放在水平匀速运动的传送带上 E 点，运动到 A 时刚好与传送带速度相同，然后经 A 沿半圆轨道滑下，再经 B 滑上滑板. 滑板运动到 C 时被牢固粘连. 物块可视为质点，质量为 m，滑板质量 $M=2m$，两半圆半径均为 R，板长 $l=6.5R$，板右端到 C 的距离 L 在 $R<L<5R$ 范围内取值，E 距 A 为 $s=5R$，物块与传送带、物块与滑板间的动摩擦因数均为 $\mu=0.5$，重力加速度取 g.



(1)求物块滑到 B 点的速度大小；

(2)试讨论物块从滑上滑板到离开滑板右端的过程中，克服摩擦力做的功 W_f 与 L 的关系，并判断物块能否滑到 CD 轨道的中点.

3.(2012·高考安徽卷)如图所示，装置的左边是足够长的光滑水平台面，一轻质弹簧左端固定，右端连接着质量 $M=2$ kg 的小物块 A. 装置的中间是水平传送带，它与左右两边的台面等高，并能平滑对接. 传送带始终以 $u=2$ m/s 的速率逆时针转动. 装置的右边是一光滑曲面，质量 $m=1$ kg 的小物块 B 从其上距水平台面高 $h=1.0$ m 处由静止释放. 已知物块 B 与传送带之间的动摩擦因数 $\mu=0.2$，$l=1.0$ m. 设物块 A、B 间发生的是对心弹性碰撞，第一次碰撞前物块 A 静止且处于平衡状态. g 取 10 m/s^2.

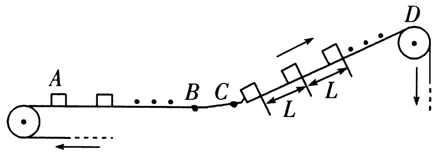


(1)求物块 B 与物块 A 第一次碰撞前的速度大小；

(2)通过计算说明物块 B 与物块 A 第一次碰撞后能否运动到右边的曲面上？

(3)如果物块 A、B 每次碰撞后，物块 A 再回到平衡位置时都会立即被锁定，而当它们再次碰撞前锁定被解除，试求出物块 B 第 n 次碰撞后的运动速度大小.

4.(2003·高考天津卷)一传送带装置示意如图,其中传送带经过 AB 区域时是水平的,经过 BC 区域时变为圆弧形(圆弧由光滑模板形成,未画出),经过 CD 区域时是倾斜的,AB 和 CD 都与 BC 相切.现将大量的质量均为 m 的小货箱一个一个在 A 处放到传送带上,放置时初速度为零,经传送带运送到 D 处,D 和 A 的高度差为 h.稳定工作时传送带速度不变,CD 段上各箱等距排列,相邻两箱的距离为 L.每个箱子在 A 处投放后,在到达 B 之前已经相对于传送带静止,且以后也不再滑动(忽略经 BC 段的微小滑动).已知在一段相当长的时间 T 内,共运送小货箱的数目 N 个.这装置由电动机带动,传送带与轮子间无相对滑动,不计轮轴处的摩擦.求电动机的平均功率 $\overline{P}$.

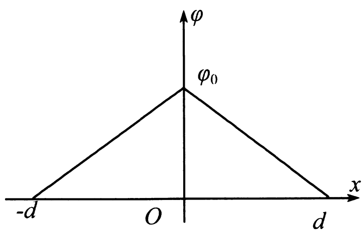


第二章　电学综合篇

第八讲　带电粒子在电场中的运动

典例剖析

【例 1】(2011·高考北京卷)静电场方向平行于 x 轴,其电势 φ 随 x 的分布可简化为如图所示的折线,图中 φ_0 和 d 为已知量.一个带负电的粒子在电场中以 $x=0$ 为中心、沿 x 轴方向做周期性运动.已知该粒子质量为 m、电荷量为 $-q$,其动能与电势能之和为 $-A(0<A<q\varphi_0)$.忽略重力.求:



(1)粒子所受电场力的大小;

(2)粒子的运动区间;

(3)粒子的运动周期.

解析

(1)由题图可知,0 与 d(或 $-d$)两点间的电势差为 φ_0

电场强度的大小 $E=\dfrac{\varphi_0}{d}$

电场力的大小 $F=qE=\dfrac{q\varphi_0}{d}$.

(2)**解法 1:根据动能定理求解**

设粒子在$[-x_0,x_0]$区间内运动,在 O 处的速率为 v_0,粒子从 O 处到 x_0 处,由动能定理有

$$E\cdot(-q)x_0=0-\frac{1}{2}mv_0^2$$

● 解析

在 O 处，动能与电势能之和为 $-A$，

即 $\frac{1}{2}mv_0^2+\varphi_0(-q)=-A$

电场强度的大小 $E=\frac{\varphi_0}{d}$

解得 $x_0=d(1-\frac{A}{q\varphi_0})$

所以，粒子的运动区间为 $-d(1-\frac{A}{q\varphi_0})\leqslant x\leqslant d(1-\frac{A}{q\varphi_0})$.

解法 2：能的转化与守恒方法

设粒子在 $[-x_0,x_0]$ 区间内运动，速率为 v，由题意得

$\frac{1}{2}mv^2-q\varphi=-A$ ①

由题图可知 $\varphi=\varphi_0(1-\frac{|x|}{d})$ ②

由①②得 $\frac{1}{2}mv^2=q\varphi_0(1-\frac{|x|}{d})-A$ ③

因动能非负，有 $q\varphi_0(1-\frac{|x|}{d})-A\geqslant 0$

得 $|x|\leqslant d(1-\frac{A}{q\varphi_0})$，即 $x_0=d(1-\frac{A}{q\varphi_0})$ ④

粒子的运动区间为 $-d(1-\frac{A}{q\varphi_0})\leqslant x\leqslant d(1-\frac{A}{q\varphi_0})$.

(3) 考虑粒子从 $-x_0$ 处开始运动的四分之一周期

根据牛顿第二定律，粒子的加速度 $a=\frac{F}{m}=\frac{Eq}{m}=\frac{q\varphi_0}{md}$ ⑤

由匀加速直线运动规律得 $t=\sqrt{\frac{2x_0}{a}}$

将④⑤代入，得 $t=\sqrt{\frac{2md^2}{q\varphi_0}(1-\frac{A}{q\varphi_0})}$

粒子运动周期 $T=4t=\frac{4d}{q\varphi_0}\sqrt{2m(q\varphi_0-A)}$.

● 解析

［**感悟方法**］

通过本题的解答，我们有以下两点收获：

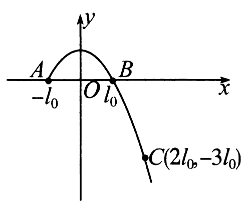
1.**“搭台唱戏”是总体策略**

带电粒子在电场、磁场中的运动问题，说到底就是“电学搭台，力学唱戏”，电场、磁场创设“场景”，粒子具体的运动规律符合力与运动的基本规律，因此，解决此类问题的根本方法还是力学方法.

2.**“五读俱全”的读图方法**

问题提供了电势 φ 随 x 的分布图，那就要求我们从图象中获取信息，获取信息的基本方法是“五读俱全”，即读横、纵坐标所表示的物理量及单位，图线的横、纵截距，图线的斜率，图线与坐标轴所围成的面积及图线的交点. 本题通过读取图线的斜率，可以知道是“匀强电场”同时可以求出电场强度的大小.

【例 2】(2015 · 高考安徽卷)在 xOy 平面内，有沿 y 轴负方向的匀强电场，场强大小为 E(图中未画出)，由 A 点斜射出质量为 m、带电荷量为 $+q$ 的粒子，B 和 C 是粒子运动轨迹上的两点，如图所示，其中 l_0 为常数. 粒子所受重力忽略不计. 求：



(1)粒子从 A 到 C 过程中电场力对它做的功；

(2)粒子从 A 到 C 过程所经历的时间；

(3)粒子经过 C 点时的速率.

● 解析

(1)$W_{AC}=qE(y_A-y_C)=3qEl_0$.

(2)**解法 1：根据抛体运动规律求解**

根据抛体运动的特点，粒子在 x 方向上做匀速直线运动，由对称性可知轨迹最高点 D 在 y 轴上，可令 $t_{AD}=t_{DB}=T$，

●解析

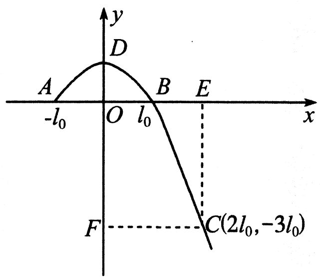
如图所示,因为 $BE=OB$,所以 $t_{BC}=T$

由 $qE=ma$ 得 $a=\frac{qE}{m}$

又 $y_D=\frac{1}{2}aT^2$,$y_D+3l_0=\frac{1}{2}a(2T)^2$

解得 $T=\sqrt{\frac{2ml_0}{qE}}$

则 $A\to C$ 过程所经历的时间 $t=3\sqrt{\frac{2ml_0}{qE}}$.



解法 2:借用匀变速直线运动推论求解

根据抛体运动的特点,粒子在 x 方向上做匀速直线运动,由对称性可知轨迹最高点 D 在 y 轴上,可令 $t_{AD}=t_{DB}=T$,

因为 $BE=OB$,所以 $t_{DB}=t_{BC}=T$

从 D 到 C 可以看成平抛运动,

所以 $\frac{y_D}{y_C}=\frac{1}{3}$,

可得 $y_D=l_0$

由 $qE=ma$ 得 $a=\frac{qE}{m}$

又 $y_D=\frac{1}{2}aT^2$

解得 $T=\sqrt{\frac{2ml_0}{qE}}$

则 A 到 C 过程所经历的时间 $t=3T=3\sqrt{\frac{2ml_0}{qE}}$.

●解析

(3)**解法 1:根据运动的合成分解法求解**

粒子在 DC 段做类平抛运动,于是有

水平方向:$2l_0=v_{Cx}(2T)$

竖直方向:$v_{Cy}=a(2T)$

$$v_C=\sqrt{v_{Cx}^2+v_{Cy}^2}=\sqrt{\frac{17qEl_0}{2m}}.$$

解法 2:运用动能定理求解

粒子在 DC 段做类平抛运动,于是有

轨迹最高点 D 的速度 $v_D=\frac{l_0}{T}$

带电粒子从 D 到 C,根据动能定理,有

$$Eq\times4l_0=\frac{1}{2}mv_C^2-\frac{1}{2}mv_D^2$$

代入 $T=\sqrt{\frac{2ml_0}{qE}}$ 可解得 $v_C=\sqrt{\frac{17qEl_0}{2m}}$.

[**感悟方法**]

本题的解答,我们采用了以下两种方法:

1. **模式思维**

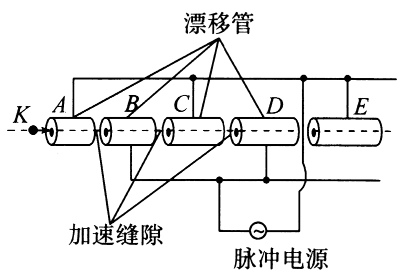
带电粒子在匀强电场中的曲线运动,由于受到恒定的电场力,所以是匀变速曲线运动,其处理方法与抛体运动相同,抛体运动中的一些规律只要作等效处理,均可以迁移应用.

2. **对称思想**

抛体运动自身具有的"对称性"特点,给我们的解决带来了诸多的切入点,比如根据对称性,我们可以得知 $t_{AD}=t_{DB}$;D 点的速度水平,DC 的运动过程可以看做"类平抛运动",这给我们利用推论 $\frac{y_D}{y_C}=\frac{1}{3}$ 创造了条件.

章节练习

1.(2016·高考四川卷)中国科学院2015年10月宣布中国将在2020年开始建造世界上最大的粒子加速器.加速器是人类揭示物质本源的关键设备,在放射治疗、食品安全、材料科学等方面有广泛应用.如图所示,某直线加速器由沿轴线分布的一系列金属圆管(漂移管)组成,相邻漂移管分别接在高频脉冲电源的两极.质子从K点沿轴线进入加速器并依次向右穿过各漂移管,在漂移管内做匀速直线运动,在漂移管间被电场加速,加速电压视为不变.设质子进入漂移管B时速度为8×10^{6} m/s,进入漂移管E时速度为1×10^{7} m/s,电源频率为1×10^{7} Hz,漂移管间缝隙很小,质子在每个管内运动时间视为电源周期的1/2.质子的比荷取1×10^{8} C/kg.求:

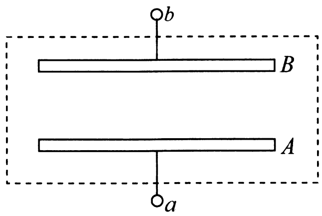


(1)漂移管B的长度;

(2)相邻漂移管间的加速电压.

2.(2015·高考北京卷)真空中放置的平行金属板可以用作光电转换装置,如图所示.光照前两板都不带电.用光照射 A 板,则板中的电子可能吸收光的能量而逸出.假设所有逸出的电子都垂直于 A 板向 B 板运动,忽略电子之间的相互作用.保持光照条件不变.a 和 b 为接线柱.

已知单位时间内从 A 板逸出的电子数为 N,电子逸出时的最大动能为 E_{km}.元电荷为 e.



(1)求 A 板和 B 板之间的最大电势差 U_m,以及将 a、b 短接时回路中的电流 $I_{短}$.

(2)图示装置可看作直流电源,求其电动势 E 和内阻 r.

(3)在 a 和 b 之间连接一个外电阻时,该电阻两端的电压为 U.外电阻上消耗的电功率设为 P;单位时间内到达 B 板的电子,在从 A 板运动到 B 板的过程中损失的动能之和设为 ΔE_k.请推导证明:$P=\Delta E_k$.

(注意:解题过程中需要用到、但题目没有给出的物理量,要在解题中做必要的说明)

3. (2005·高考全国卷Ⅰ)如图1所示,B为电源,电动势 $\varepsilon=27$ V,内阻不计.固定电阻 $R_1=500\ \Omega$,R_2为光敏电阻.C为平行板电容器,虚线到两极板距离相等,极板长 $l_1=8.0\times10^{-2}$ m,两极板的间距 $d=1.0\times10^{-2}$ m.S为屏,与极板垂直,到极板的距离 $l_2=0.16$ m.P为一圆盘,由形状相同、透光率不同的三个扇形 a、b 和 c 构成,它可绕 AA' 轴转动.当细光束通过扇形 a、b、c 照射光敏电阻 R_2 时,R_2 的阻值分别为 1 000 Ω、2 000 Ω、4 500 Ω.有一细电子束沿图中虚线以速度 $v_0=8.0\times10^6$ m/s 连续不断地射入 C.已知电子电量 $e=1.6\times10^{-19}$ C,电子质量 $m=9\times10^{-31}$ kg.忽略细光束的宽度、电容器的充电放电时间及电子所受的重力.假设照在 R_2 上的光强发生变化时 R_2 阻值立即有相应的改变.

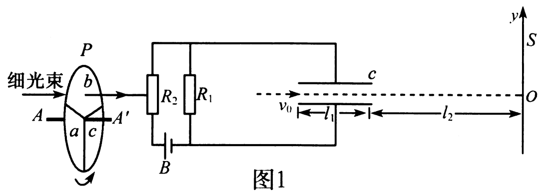


图1

(1)设圆盘不转动,细光束通过 b 照射到 R_2 上,求电子到达屏 S 上时,它离 O 点的距离 y.(计算结果保留二位有效数字)

(2)设转盘按图 1 中箭头方向匀速转动，每 3 秒转一圈. 取光束照在 a、b 分界处时 $t=0$，试在图 2 给出的坐标纸上，画出电子到达屏 S 上时，它离 O 点的距离 y 随时间 t 的变化图线(0－6 s 间). 要求在 y 轴上标出图线最高点与最低点的值.（不要求写出计算过程，只按画出的图线评分.）

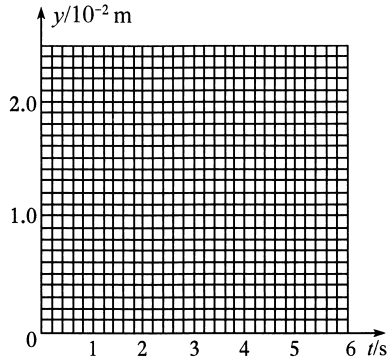
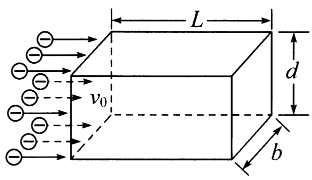
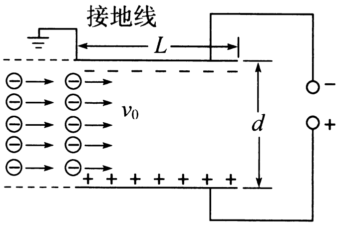


图2

4．(2011·高考浙江卷)如图甲所示，静电除尘装置中有一长为 L、宽为 b、高为 d 的矩形通道，其前、后面板使用绝缘材料，上、下面板使用金属材料．图乙是装置的截面图，上、下两板与电压恒定的高压直流电源相连．质量为 m、电荷量为 $-q$、分布均匀的尘埃以水平速度 v_0 进入矩形通道，当带负电的尘埃碰到下板后其所带电荷被中和，同时被收集．通过调整两板间距 d 可以改变收集频率 η．当 $d=d_0$ 时，η 为 81%(即离下板 $0.81d_0$ 范围内的尘埃能够被收集)．不计尘埃的重力及尘埃之间的相互作用．



图甲



图乙

(1)求收集效率为 100%时，两板间距的最大值 d_m；

(2)求收集效率 η 与两板间距 d 的函数关系；

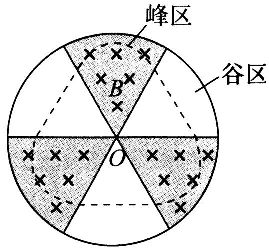
(3)若单位体积内的尘埃数为 n，求稳定工作时单位时间下板收集的尘埃质量 $\frac{\Delta M}{\Delta t}$ 与两板间距 d 的函数关系，并绘出图线．

第九讲 带电粒子在磁场中的运动

典例剖析

【例 1】(2016·高考浙江卷)为了进一步提高回旋加速器的能量,科学家建造了"扇形聚焦回旋加速器". 在扇形聚焦过程中,离子能以不变的速率在闭合平衡轨道上周期性旋转.

扇形聚焦磁场分布的简化图如图所示,圆心为 O 的圆形区域等分成六个扇形区域,其中三个为峰区,三个为谷区,峰区和谷区相间分布。峰区内存在方向垂直纸面向里的匀强磁场,磁感应强度为 B,谷区内没有磁场. 质量为 m,电荷量为 q 的正离子,以不变的速率 v 旋转,其闭合平衡轨道如图中虚线所示.



(1)求闭合平衡轨道在峰区内圆弧的半径 r,并判断离子旋转的方向是顺时针还是逆时针;

(2)求轨道在一个峰区内圆弧的圆心角 θ,及离子绕闭合平衡轨道旋转的周期 T;

(3)在谷区也施加垂直纸面向里的匀强磁场,磁感应强度为 B',新的闭合平衡轨道在一个峰区内的圆心角 θ 变为 90°,求 B' 和 B 的关系. 已知:$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$,$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

解析

(1)在峰区内,离子做匀速圆周运动,洛伦兹力提供向心力,有 $qvB=m\frac{v^2}{r}$

可得圆弧半径 $r=\frac{mv}{qB}$

根据左手定则,可得正离子旋转方向为逆时针方向.

●解析

(2)如图甲所示，正离子运动一周旋转 360°，方向的改变均发生在磁场中，即三个峰区.

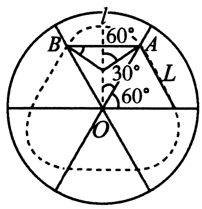
根据对称性，离子经过每个峰区旋转 120°，即峰区内圆弧的圆心角 $\theta=\frac{2\pi}{3}$

每个圆弧的长度均为 $l=\frac{2\pi r}{3}=\frac{2\pi mv}{3qB}$

每段直线长度均为 $L=AB=2r\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}r=\frac{\sqrt{3}mv}{qB}$

周期 $T=\frac{3(l+L)}{v}$

代入得 $T=\frac{(2\pi+3\sqrt{3})m}{qB}$.



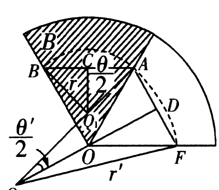
甲

(3)正离子运动一周旋转 360°，方向的改变均发生在磁场中，即三个峰区与三个谷区. 如图乙所示，根据对称性，离子经过一个峰区与一个谷区共旋转了 120°，现在已知峰区旋转了 90°，那么谷区旋转了 $\theta'=120°-90°=30°$.

在谷区内，离子做匀速圆周运动，洛伦兹力提供向心力，有 $qvB'=m\frac{v^2}{r'}$

谷区内的轨道圆弧半径 $r'=\frac{mv}{qB'}$

接下来，解题的关键是找到 r 与 r' 的关系，基本的方法是构建三角形，运用几何关系来解出半径关系，最后求出答案. 下面提供四种解法：



乙

●解析

解法 1：运用等量关系求解

$AD=r'\sin\frac{\theta'}{2}$，$AC=r\sin\frac{\theta}{2}$

由几何关系可知 $AD=AC$

即 $r\sin\frac{\theta}{2}=r'\sin\frac{\theta'}{2}$

由三角关系 $\sin\frac{30^\circ}{2}=\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

代入得 $B'=\frac{\sqrt{3}-1}{2}B$.

解法 2：运用正弦定理求解

由几何关系可知，$\triangle ABO$ 为等边三角形，$AO=AB=\sqrt{2}r$

又 $\angle BAO=60^\circ$，所以 $\angle O_2AO=60^\circ-45^\circ=15^\circ$，即 $\triangle AOO_2$ 为等腰三角形.

根据正弦定理，有 $\frac{r'}{\sin 150^\circ}=\frac{\sqrt{2}r}{\sin 15^\circ}$

代入得 $B'=\frac{\sqrt{3}-1}{2}B$.

解法 3：运用余弦定理求解

由几何关系可知，$AF=AB=\sqrt{2}r$

在 $\triangle AO_2F$ 中，根据余弦定理，有

$(\sqrt{2}r)^2=r'^2+r'^2-2r'\cos\theta'$

代入得 $B'=\frac{\sqrt{3}-1}{2}B$.

解法 4：运用直角三角形求解

在直角 $\triangle AO_2D$ 中，因为 $AD=\frac{\sqrt{2}}{2}r$，所以 $AO_2=AD\cdot\frac{1}{\sin 15^\circ}$，

即 $r'\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}r$

代入得 $B'=\frac{\sqrt{3}-1}{2}B$.

●解析

［感悟方法］

带电粒子在磁场中的运动，同样是属于"搭台唱戏"类问题，"台"是磁场，"戏"是匀速圆周运动，得出两个基本规律 $r=\frac{mv}{qB}$、$T=\frac{2\pi m}{qB}$. 除此之外，要解决好带电粒子在磁场中的匀速圆周运动问题，还要特别突出两个重要的方法：

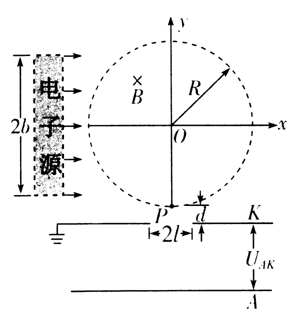
1. 对称思想

带电粒子在匀强磁场中的匀速圆周运动问题，往往都呈现出时间空间的对称性，这往往会是解题的切入点，本题中根据对称性，得出离子经过每个峰区、谷区总共旋转 120°，成为解题的关键.

2. 几何关系

带电粒子在匀强磁场中的匀速圆周运动问题，从物理来讲并不难，无非是两个基本规律 $r=\frac{mv}{qB}$、$T=\frac{2\pi m}{qB}$，但最困难的是通过几何关系求出半径 r 或有关时间的转动角度 θ.

【例 2】(2017·浙江 4 月)如图所示，在 xOy 平面内，有一电子源持续不断地沿 x 正方向每秒发射出 N 个速率均为 v 的电子，形成宽为 $2b$、在 y 轴方向均匀分布且关于 x 轴对称的电子流，电子流沿 x 方向射入一个半径为 R、中心位于原点 O 的圆形匀强磁场区域，磁场方向垂直 xOy 平面向里，电子经过磁场偏转后均从 P 点射出. 在磁场区域的正下方有一对平行于 x 轴的金属平行板 K 和 A，其中 K 板与 P 点的距离为 d，中间开有宽度为 $2l$ 且关于 y 轴对称的小孔. K 板接地，A 与 K 两板间加有正负、大小均可调的电压 U_{AK}. 穿过 K 板小孔到达 A 板的所有电子被收集且导出，从而形成电流. 已知 $b=\frac{\sqrt{3}}{2}R$，$d=l$，电子质量为 m，电荷量为 e，忽略电子间的相互作用.



(1)求磁感应强度 B 的大小;

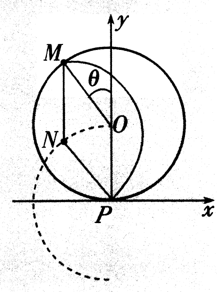
(2)求电子流从 P 点射出时与负 y 轴方向的夹角 θ 的范围;

(3)当 $U_{AK}=0$ 时,求每秒经过极板 K 上的小孔到达极板 A 的电子数;

(4)画出电流 i 随 U_{AK} 变化的关系曲线.

●解析

(1)解答本题的关键是要获得结论:电子经过磁场偏转后均从 P 点射出,那么粒子的轨道半径 $r=R$. 我们不妨逆向证明,即当轨道半径 $r=R$ 时,宽为 $2b$ 的电子流进入磁场后最终都从 P 点射出. 具体证明方法如下:



甲

方法 1:从任一点 M 水平进入磁场的电子在磁场中做半径为 R 的匀速圆周运动,其圆心位于其正下方的 N 点,如图甲所示,宽为 $2b$ 的电子流进入磁场后的圆心轨迹位于如图虚线半圆上,此虚线半圆的圆心就是 P 点,即所有宽为 $2b$ 的电子流进入磁场后最终均从 P 点射出.

方法 2:从任一点 M 水平进入磁场的电子在磁场中做半径为 R 的匀速圆周运动. 如图甲所示, M 点与 O 点的连线与 y 轴的夹角为 θ,其圆心 N 的坐标为 $(-R\sin\theta, R\cos\theta)$,圆周运动轨迹方程为 $(x+R\sin\theta)^2+(y-R\cos\theta)^2=R^2$

得 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-R\sin\theta \\ y=R(1+\cos\theta) \end{cases}$

其中 $(-R\sin\theta, R+R\cos\theta)$ 就是 M 点, $(0,0)$ 是 P 点,所以电子经过磁场偏转后均从 P 点射出.

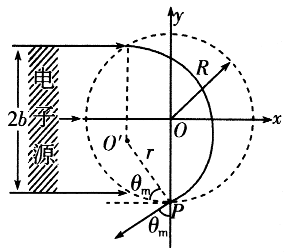
电子经过磁场偏转后均从 P 点射出,那么粒子的转道半径 $r=R$.

●解析

电子在磁场中做圆周运动，有 $qvB=m\frac{v^2}{r}$

可解得 $B=\frac{mv}{eR}$.

(2)上端电子从 P 点射出时与负 y 轴最大夹角为 θ_m，如图乙所示，由几何关系得



乙

$\sin\theta_m=\frac{b}{R}$

解得 $\theta_m=60°$

同理，下端电子从 P 点射出时与负 y 轴最大夹角也为 $60°$

故 θ 的范围是 $-60°\leqslant\theta\leqslant60°$.

(3)设能够到达 A 板的电子射出磁场时与负 y 轴最大夹角为 α，由 $\tan\alpha=\frac{l}{d}$

得 $\alpha=45°$

对应的电子从电子源射出时与 x 轴的距离 $y'=R\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}R$

设每秒进入两极板间的电子数为 n，则

$\frac{n}{N}=\frac{y'}{b}=\frac{\sqrt{6}}{3}=0.82$

解得 $n=0.82N$.

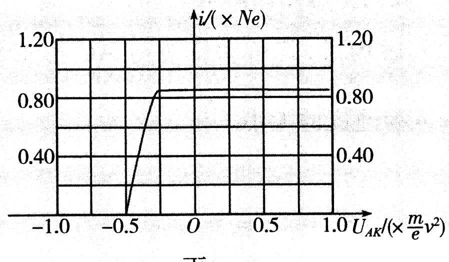
(4)由动能定理得出遏止电压 $U_c=-\frac{1}{2e}mv^2$

与负 y 轴成 $45°$ 角的电子的运动轨迹刚好与 A 板相切时，其逆过程是类平抛运动，达到饱和电流所需的最小反向电压 $U'=-\frac{1}{4e}mv^2$

根据(3)可得饱和电流大小 $i_{max}=0.82Ne$，

●解析

图线如图丙所示.



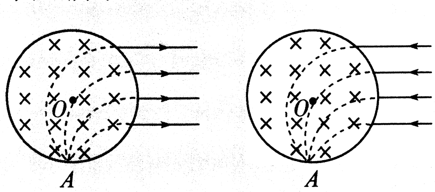
丙

［**感悟方法**］

本题涉及粒子源问题中的“磁聚焦”问题，“磁聚焦”问题存在两条特殊规律：

规律一：带电粒子从圆形有界磁场边界上某点射入磁场，如果圆形磁场的半径与圆轨迹半径相等，则粒子的出射速度方向与圆形磁场上入射点的切线方向平行，如图甲所示.

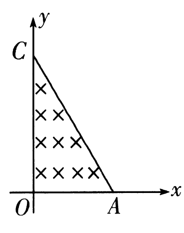
规律二：平行射入圆形有界磁场的相同带电粒子，如果圆形磁场的半径与圆轨迹半径相等，则所有粒子都从磁场边界上的同一点射出，并且出射点的切线与入射速度方向平行，如图乙所示.



甲　　　　乙

章节练习

1. (2016·高考海南卷)如图所示，A、C 两点分别位于 x 轴和 y 轴上，$\angle OCA=30^\circ$，OA 的长度为 L. 在△OCA 区域内有垂直于 xOy 平面向里的匀强磁场. 质量为 m、电荷量为 q 的带正电粒子，以平行于 y 轴的方向从 OA 边射入磁场. 已知粒子从某点入射时，恰好垂直于 OC 边射出磁场，且粒子在磁场中运动的时间为 t_0. 不计重力.

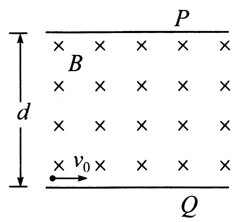


(1)求磁场的磁感应强度的大小；

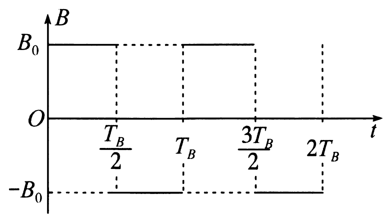
(2)若粒子先后从两不同点以相同的速度射入磁场，恰好从 OC 边上的同一点射出磁场，求该粒子这两次在磁场中运动的时间之和；

(3)若粒子从某点射入磁场后，其运动轨迹与 AC 边相切，且在磁场内运动的时间为 $\frac{5}{3}t_0$，求粒子此次入射速度的大小.

2. (2014 · 高考山东卷)如图甲所示,间距为 d、垂直于纸面的两平行板 P、Q 间存在匀强磁场. 取垂直于纸面向里为磁场的正方向,磁感应强度随时间的变化规律如图乙所示. $t=0$ 时刻,一质量为 m、带电荷量为 $+q$ 的粒子(不计重力),以初速度 v_0 由 Q 板左端靠近板面的位置,沿垂直于磁场且平行于板面的方向射入磁场区. 当 B_0 和 T_B 取某些特定值时,可使 $t=0$ 时刻入射的粒子经 Δt 时间恰能垂直打在 P 板上(不考虑粒子反弹). 上述 m、q、d、v_0 为已知量.



图甲



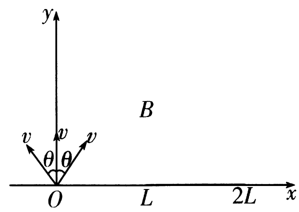
图乙

(1)若 $\Delta t=\frac{1}{2}T_B$,求 B_0;

(2)若 $\Delta t=\dfrac{3}{2}T_B$，求粒子在磁场中运动时加速度的大小；

(3)若 $B_0=\dfrac{4mv_0}{qd}$，为使粒子仍能垂直打在 P 板上，求 T_B.

3.(2017·浙江 11 月)如图所示,x 轴上方存在垂直纸面向外的匀强磁场,坐标原点处有一正离子源,单位时间在 xOy 平面内发射 n_0 个速率均为 v 的离子,分布在 y 轴两侧各为 θ 的范围内.在 x 轴上放置长度为 L 的离子收集板,其右端点距坐标原点的距离为 $2L$,当磁感应强度为 B_0 时,沿 y 轴正方向入射的离子,恰好打在收集板的右端点.整个装置处于真空中,不计重力,不考虑离子间的碰撞,忽略离子间相互作用.

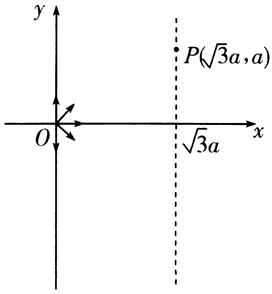


(1)求离子的比荷$\frac{q}{m}$;

(2)若发射的离子被收集板全部收集,求 θ 的最大值;

(3)假设离子到达 x 轴时沿 x 轴均匀分布.当 $\theta=37°$,磁感应强度在 $B_0 \leqslant B \leqslant 3B_0$ 的区间取不同值时,求单位时间内收集板收集到的离子数 n 与磁感应强度 B 之间的关系.(不计离子在磁场中运动的时间)

4. (2010·高考全国卷)如图,在 $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}a$ 区域内存在与 xy 平面垂直的匀强磁场,磁感应强度的大小为 B. 在 $t=0$ 时刻,一位于坐标原点的粒子源在 xy 平面内发射出大量同种带电粒子,所有粒子的初速度大小相同,方向与 y 轴正方向夹角分布在 0～180°范围内. 已知沿 y 轴正方向发射的粒子在 $t=t_0$ 时刻刚好从磁场边界上 $P(\sqrt{3}a, a)$ 点离开磁场. 求:



(1)粒子在磁场中做圆周运动的半径 R 及粒子的比荷 $\frac{q}{m}$;

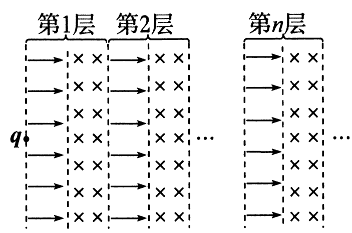
(2)此时刻仍在磁场中的粒子的初速度方向与 y 轴正方向夹角的取值范围;

(3)从粒子发射到全部粒子离开磁场所用的时间.

第十讲 带电粒子在电磁场中的运动

典例剖析

【例 1】(2015·高考天津卷)现代科学仪器常利用电场、磁场控制带电粒子的运动.真空中存在着如图所示的多层紧密相邻的匀强电场和匀强磁场,电场与磁场的宽度均为 d. 电场强度为 E,方向水平向右;磁感应强度为 B,方向垂直纸面向里.电场、磁场的边界互相平行且与电场方向垂直.一个质量为 m、电荷量为 q 的带正电粒子在第 1 层电场左侧边界某处由静止释放,粒子始终在电场、磁场中运动,不计粒子重力及运动时的电磁辐射.



(1)求粒子在第 2 层磁场中运动时速度 v_2 的大小与轨迹半径 r_2;

(2)粒子从第 n 层磁场右侧边界穿出时,速度的方向与水平方向的夹角为 θ_n,试求 $\sin\theta_n$;

(3)若粒子恰好不能从第 n 层磁场右侧边界穿出,试问在其他条件不变的情况下,也进入第 n 层磁场,但比荷较该粒子大的粒子能否穿出该层磁场右侧边界,请简要推理说明之.

解析

(1)粒子在进入第 2 层磁场时,经过两次电场加速,中间穿过磁场时洛伦兹力不做功.由动能定理,有 $2qEd=\frac{1}{2}mv_2^2$ ①

由①式解得 $v_2=2\sqrt{\frac{qEd}{m}}$ ②

粒子在第 2 层磁场中受到的洛伦兹力充当向心力,有 $qv_2B=m\frac{v_2^2}{r_2}$ ③

由②③式解得 $r_2=\frac{2}{B}\sqrt{\frac{mEd}{q}}$. ④

●解析

(2)**解法 1:综合演绎法**

设粒子在第 n 层磁场中运动的速度为 v_n,轨迹半径为 r_n(各量的下标均代表粒子所在层数,下同).

$$nqEd=\frac{1}{2}mv_n^2 \quad ⑤$$

$$qv_nB=m\frac{v_n^2}{r_n} \quad ⑥$$

粒子进入第 n 层磁场时,速度的方向与水平方向的夹角为 α_n,从第 n 层磁场右侧边界穿出时速度方向与水平方向的夹角为 θ_n,粒子在电场中运动时,垂直于电场线方向的速度分量不变,有 $v_{n-1}\sin\theta_{n-1}=v_n\sin\alpha_n$ ⑦

由图 1 看出

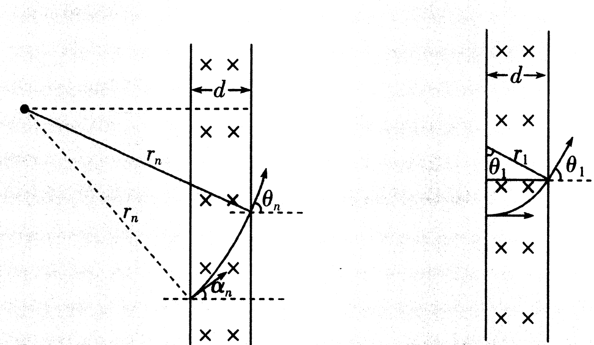


图1　　图2

$$r_n\sin\theta_n-r_n\sin\alpha_n=d \quad ⑧$$

由⑥⑦⑧式得 $r_n\sin\theta_n-r_{n-1}\sin\theta_{n-1}=d$ ⑨

由⑨式看出 $r_1\sin\theta_1, r_2\sin\theta_2, \cdots, r_n\sin\theta_n$ 为一等差数列,公差为 d,可得

$$r_n\sin\theta_n=r_1\sin\theta_1+(n-1)d \quad ⑩$$

当 $n=1$ 时,由图 2 看出 $r_1\sin\theta_1=d$ ⑪

由⑤⑥⑩⑪式得 $\sin\theta_n=B\sqrt{\frac{nqd}{2mE}}$. ⑫

解析

解法 2：分析归纳法

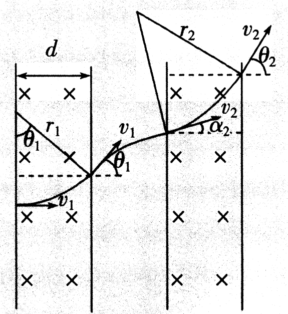


图3

如图 3 可得 $r\sin\theta_1=d$

在第 2 个磁场中有 $r_2\sin\theta_2-r_2\sin\alpha_2=d$，

考虑到在电场中粒子运动过程的竖直速度不变，有 $v_2\sin\alpha_2=v_1\sin\theta_1$

在磁场中圆周运动，有 $r_2=\dfrac{mv_2}{qB}$

解得 $r_2\sin\theta_2=2d$

在第 3 个磁场中有 $r_3\sin\theta_3-r_3\sin\alpha_3=d$，$v_3\sin\alpha_3=v_2\sin\theta_2$

在磁场中圆周运动，有 $r_3=\dfrac{mv_3}{qB}$

解得 $r_3\sin\theta_3=3d$

…

可递推得到 $r_n\sin\theta_n=nd$

在磁场中圆周运动，有 $r_n=\dfrac{mv_n}{qB}$

粒子通过 n 个电场加速有 $nqEd=\dfrac{1}{2}mv_n^2$

可解得 $\sin\theta_n=B\sqrt{\dfrac{nqd}{2mE}}$.

(3)若粒子恰好不能从第 n 层磁场右侧边界穿出，则

$\theta_n=\dfrac{\pi}{2}$，

$\sin\theta_n=1$

●解析

在其他条件不变的情况下，换用比荷更大的粒子，设其比荷为$\frac{q'}{m'}$，假设能穿出第n层磁场右侧边界，粒子穿出时，速度方向与水平方向的夹角为θ'_n，由于$\frac{q'}{m'}>\frac{q}{m}$

则导致$\sin\theta'_n>1$

说明θ'_n不存在，即原假设不成立. 所以比荷较该粒子大的粒子不能穿出该层磁场右侧边界.

［**感悟方法**］

本题不仅仅是一般的多过程问题，它是一个无限多过程问题，在解题过程中我们采用了两种策略：

1. **合理分段，巧妙整合**

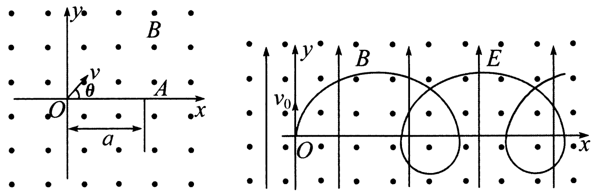
总体来看，本题是一个带电粒子在电场、磁场中的分段运动，在电场中做直线运动和匀变速曲线运动，在磁场中做匀速圆周运动. 由于洛仑兹力不做功，粒子速度的变化仅仅是电场力做功，所以求解进入第n层磁场粒子的速度时，可以将n个电场整体处理.

2. **有限推理，洞悉规律**

对于无限过程问题，如果条件允许，可以将无限个过程作整体处理，比如本题中的电场，除此之外，常用的方法是数学归纳法，当然，物理中的归纳是一种“不完全归纳”，即先求出前面若干个过程（一般为3个）的结果，然后找到其中的规律，直接可以得到第n过程的结果，这种方法我们称为“分析归纳法”.

对于无限过程问题，常常还有一种更巧妙的方法，即直接选取第n个过程，只要找到第n个过程与第$n-1$个过程之间的逻辑关系，以此类推，可以把握整个过程的规律，同样可以求出问题的结果，这种方法我们称之为“综合演绎法”.

【例 2】(2013·高考福建卷)如图甲,空间存在一范围足够大的垂直于 xOy 平面向外的匀强磁场,磁感应强度大小为 B. 让质量为 m,电荷量为 $q(q>0)$ 的粒子从坐标原点 O 沿 xOy 平面以不同的初速度大小和方向入射到该磁场中. 不计重力和粒子间的影响.



甲　　　　乙

(1)若粒子以初速度 v_1 沿 y 轴正向入射,恰好能经过 x 轴上的 $A(a,0)$ 点,求 v_1 的大小.

(2)已知一粒子的初速度大小为 $v(v>v_1)$,为使该粒子能经过 $A(a,0)$ 点,其入射角 θ(粒子初速度与 x 轴正向的夹角)有几个? 并求出对应的 $\sin\theta$ 值.

(3)如图乙,若在此空间再加入沿 y 轴正向、大小为 E 的匀强电场,一粒子从 O 点以初速度 v_0 沿 y 轴正向发射. 研究表明:粒子在 xOy 平面内做周期性运动,且在任一时刻,粒子速度的 x 分量 v_x 与其所在位置的 y 坐标成正比,比例系数与场强大小 E 无关. 求该粒子运动过程中的最大速度值 v_m.

●解析

(1)带电粒子以速率 v_1 在匀强磁场 B 中做匀速圆周运动,半径为 R_1,有

$$qv_1B=m\frac{v_1^2}{R_1} \quad ①$$

当粒子沿 y 轴正向入射,转过半个圆周至 A 点,有 $R_1=\frac{a}{2}$ ②

由②代入①式得 $v_1=\frac{qBa}{2m}$. ③

(2)如图 1 所示,O、A 两点处于同一个圆周上,且圆心在 $x=\frac{a}{2}$ 的直线上,半径为 R. 当给定一个初速率 v 时,有 2 个入射角,分别在第 1、2 象限,有

$$\sin\theta'=\sin\theta=\frac{a}{2R} \quad ④$$

由①④式解得 $\sin\theta=\frac{aqB}{2mv}$. ⑤

●解析

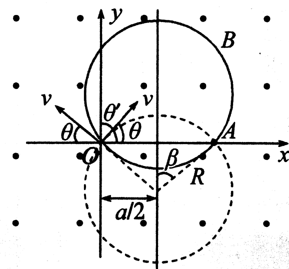


图1

(3)**解法1:运用牛顿运动定律结合动能定理求解**

粒子在运动过程中受到电场力 Eq 与洛伦兹力 f,洛伦兹力不做功,仅有电场力做功,因此在轨道的最高点处速率最大,且此处速度方向水平. 用 y_m 表示该处的纵坐标,有

$$qEy_m=\frac{1}{2}mv_m^2-\frac{1}{2}mv_0^2 \quad ①$$

由题意 $v_m=ky_m$ ②

且 k 与 E 的大小无关,因此可利用 $E=0$ 时的状况来求 k,$E=0$ 时洛伦兹力充当向心力,$qv_0B=m\frac{v_0^2}{R_0}$,

得 $R_0=\frac{mv_0}{qB}$,

其中的 R_0 就是对应的纵坐标 y_0,

因此得 $k=\frac{qB}{m}$,

此时带入②得 $y_m=\frac{mv_m}{qB}$,

将此式带入①,整理后可得

$v_m^2-\frac{2E}{B}v_m-v_0^2=0$,

解得 $v_m=\frac{E}{B}\pm\sqrt{(\frac{E}{B})^2+v_0^2}$,

舍弃负值,得 $v_m=\frac{E}{B}+\sqrt{(\frac{E}{B})^2+v_0^2}$.

解析

解法 2:运用运动的合成与分解原理求解

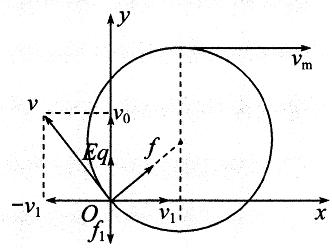


图2

如图 2 所示,假设粒子在 x 方向上有 v_1 和 $-v_1$,其中 v_1 方向的速度产生的洛伦兹力 f_1 与电场力 Eq 平衡,即 $v_1qB=Eq$,可得 $v_1=\frac{E}{B}$.

然后将 $-v_1$ 与 v_0 合成为 v,即 $v=\sqrt{v_0^2+v_1^2}$,受到洛伦兹力为 f,这样粒子相当于受到三个力:洛伦兹力 f_1、洛伦兹力 f 以及电场力 Eq.

这样,粒子的运动可看成一个速度为 v_1 的匀速直线运动与一个速度为 v 的匀速圆周运动的合成,形成一个"摆线","摆线"的瞬时速度为 v_1 与 v 的合成.当粒子运动到最高点时,v_1 与 v 的合速度最大,也就是粒子的速度最大,即 $v_m=\frac{E}{B}+\sqrt{(\frac{E}{B})^2+v_0^2}$.

解法 3:运用动能定理结合动量定理求解

粒子在运动过程中受到电场力 Eq 与洛伦兹力 f,洛伦兹力不做功,仅有电场力做功,因此在轨道的最高点处速率最大,且此处速度方向水平,如图 3 所示.用 y_m 表示该处的纵坐标,有 $qEy_m=\frac{1}{2}mv_m^2-\frac{1}{2}mv_0^2$ ①

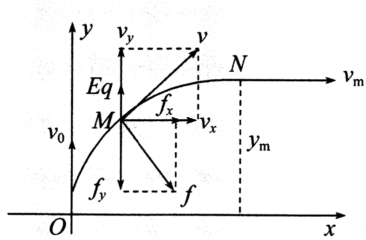


图3

●解析

从水平方向看,粒子在水平方向的动量变化是由洛伦兹力的水平分量 f_x 引起的.从 O 到最高点 N 的过程,设洛伦兹力水平分量的平均值为 $\overline{f_x}$,

根据动量定理得 $\overline{f_x}\cdot t=mv_m$ ②

又根据洛伦兹力公式得 $\overline{f_x}=qB\overline{v_y}$ ③

从竖直方向看,根据位移公式得 $y_m=\overline{v_y}\cdot t$ ④

联立①②③④可得 $v_m^2-\dfrac{2E}{B}v_m-v_0^2=0$,

解得 $v_m=\dfrac{E}{B}\pm\sqrt{(\dfrac{E}{B})^2+v_0^2}$,

舍弃负值,得 $v_m=\dfrac{E}{B}+\sqrt{(\dfrac{E}{B})^2+v_0^2}$.

[**感悟方法**]

第(3)问创设的"场景"是电场与磁场的叠加,带电粒子可以做匀速直线运动(比如速度选择器),也可以做曲线运动,不过并不是我们常见的匀变速曲线运动或是匀速圆周运动,对于求解某时刻的速度,往往有两种方法:

1. **动能定理法**

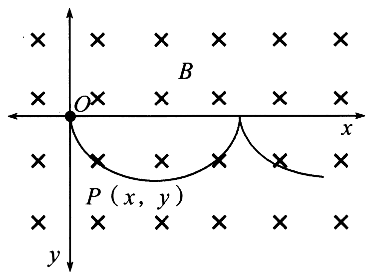
带电粒子在运动过程中受到电场力和洛仑兹力,洛仑兹力始终不做功,做功的仅有电场力,而且电场力做功与具体的路径无关,仅与初末位置有关,这就给动能定理求解速度创造了条件.

2. **运动的合成与分解法**

虽然,粒子的运动轨迹并不是匀变速曲线运动,但通过适当的等效处理,可以将粒子的曲线运动转化为一个匀速直线运动与一个匀速圆周运动的合成.

章节练习

1.(2008·高考江苏卷)在场强为 B 的水平匀强磁场中,一质量为 m、带正电 q 的小球在 O 静止释放,小球的运动曲线如图所示.已知此曲线在最低点的曲率半径为该点到 x 轴距离的 2 倍,重力加速度为 g.求:

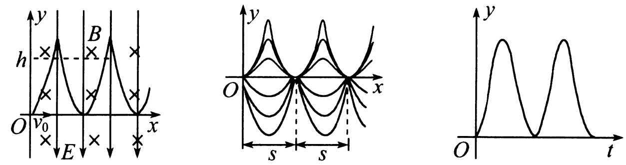


(1)小球运动到任意位置 $P(x,y)$ 的速率 v.

(2)小球在运动过程中第一次下降的最大距离 y_m.

(3)当在上述磁场中加一竖直向上场强为 $E(E>\frac{mg}{q})$ 的匀强电场时,小球从 O 静止释放后获得的最大速率 v_m.

2.(2011·高考福建卷)如图甲,在 $x>0$ 的空间中存在沿 y 轴负方向的匀强电场和垂直于 xOy 平面向里的匀强磁场,电场强度大小为 E,磁感应强度大小为 B.一质量为 m,带电量为 $q(q>0)$ 的粒子从坐标原点 O 处,以初速度 v_0 沿 x 轴正方向射入,粒子的运动轨迹见图甲,不计粒子的重力.



甲　　乙　　丙

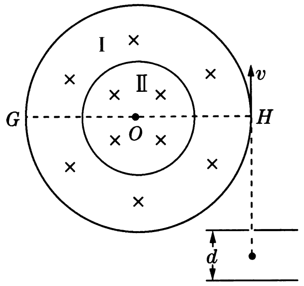
(1)求该粒子运动到 $y=h$ 时的速度大小 v;

(2)现只改变入射粒子初速度的大小,发现初速度大小不同的粒子虽然运动轨迹($y-x$ 曲线)不同,但具有相同的空间周期性,如图乙所示;同时,这些粒子在 y 轴方向上的运动($y-t$ 关系)是简谐运动,且都有相同的周期 $T=\dfrac{2\pi m}{qB}$.

Ⅰ.求粒子在一个周期 T 内,沿 x 轴方向前进的距离 s;

Ⅱ.当入射粒子的初速度大小为 v_0 时,其 $y-t$ 图象如图丙所示,求该粒子在 y 轴方向上做简谐运动的振幅 A,并写出 $y-t$ 的函数表达式.

3. (2015·高考山东卷)如图所示，直径分别为 D 和 $2D$ 的同心圆处于同一竖直面内，O 为圆心，GH 为大圆的水平直径. 两圆之间的环形区域(Ⅰ区)和小圆内部(Ⅱ区)均存在垂直圆面向里的匀强磁场. 间距为 d 的两平行金属板间有一匀强电场，上极板开有一小孔. 一质量为 m、电量为 $+q$ 的粒子由小孔下方 $\frac{d}{2}$ 处静止释放，加速后粒子以竖直向上的速度 v 射出电场，由 H 点紧靠大圆内侧射入磁场. 不计粒子的重力.

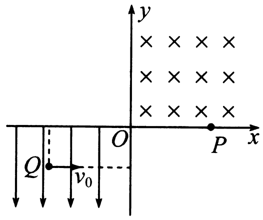


(1)求极板间电场强度的大小；

(2)若粒子运动轨迹与小圆相切，求Ⅰ区磁感应强度的大小；

(3)若Ⅰ区、Ⅱ区磁感应强度的大小分别为 $\frac{2mv}{qD}$、$\frac{4mv}{qD}$，粒子运动一段时间后再次经过 H 点，求这段时间粒子运动的路程.

4.(2017·高考天津卷)平面直角坐标系 xOy 中,第Ⅰ象限存在垂直于平面向里的匀强磁场,第Ⅲ象限存在沿 y 轴负方向的匀强电场,如图所示.一带负电的粒子从电场中的 Q 点以速度 v_0 沿 x 轴正方向开始运动,Q 点到 y 轴的距离为到 x 轴距离的 2 倍.粒子从坐标原点 O 离开电场进入磁场,最终从 x 轴上的 P 点射出磁场,P 点到 y 轴距离与 Q 点到 y 轴距离相等.不计粒子重力,问:



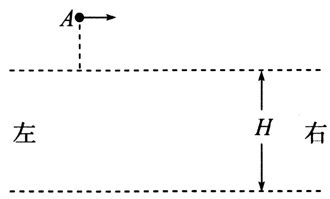
(1)粒子到达 O 点时速度的大小和方向;

(2)电场强度和磁感应强度的大小之比.

第十一讲 带电粒子在复合场中的运动

典例剖析

【例 1】(2017·高考全国卷Ⅱ)如图,两水平面(虚线)之间的距离为 H,其间的区域存在方向水平向右的匀强电场.自该区域上方的 A 点将质量均为 m、电荷量分别为 q 和 $-q$ ($q>0$)的带电小球 M、N 先后以相同的初速度沿平行于电场的方向射出.小球在重力作用下进入电场区域,并从该区域的下边界离开.已知 N 离开电场时的速度方向竖直向下;M 在电场中做直线运动,刚离开电场时的动能为 N 刚离开电场时动能的 1.5 倍.不计空气阻力,重力加速度大小为 g.求



(1)M 与 N 在电场中沿水平方向的位移之比;

(2)A 点距电场上边界的高度;

(3)该电场的电场强度大小.

●解析

(1)设小球 M、N 在 A 点水平射出时的初速度大小为 v_0,则它们进入电场时的水平速度仍然为 v_0.M、N 在电场中运动的时间 t 相等,电场力作用下产生的加速度沿水平方向,大小均为 a,在电场中沿水平方向的位移分别为 s_1 和 s_2.

解法 1:运用 $v=v_0+at$ 与 $s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ 求解

由题给条件和运动学公式得

小球 N 在水平方向做匀减速运动,由速度公式得 $v_0-at=0$

由位移公式得小球 M 的水平位移 $s_1=v_0t+\frac{1}{2}at^2$

小球 N 的水平位移 $s_2=v_0t-\frac{1}{2}at^2$

●解析

联立上述三式可得$\frac{s_1}{s_2}=3$.

解法 2:运用 $v=v_0+at$ 与 $s=\frac{v_0+v}{2}t$ 求解

小球 N 在水平方向做匀减速运动,由速度公式得 $v_0-at=0$

小球 M 在水平方向做匀加速运动,由速度公式得 $v_M=v_0+at$

由位移公式得小球 M 的水平位移 $s_1=\frac{v_0+v_M}{2}t$

小球 N 的水平位移 $s_2=\frac{v_0}{2}t$

联立可得$\frac{s_1}{s_2}=3$.

解法 3:运用 v-t 图象求解

作出两个小球水平方向运动的 v-t 图象,如图 1 所示

在图中,图线所围成的面积表示位移,通过计算面积可得$\frac{s_1}{s_2}=3$.

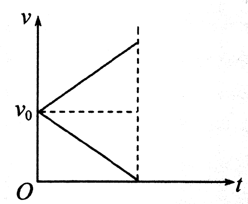


图1

解法 4:运用逆向思维结合推论求解

小球 N 在水平方向做初速度为 v_0,末速度为 0 的匀减速直线运动,运用逆向思维可以将小球 N 的运动看成初速度为 0,末速度为 v_0 的匀加速直线运动;小球 M 在水平方向上做初速度为 v_0 的匀加速运动,考虑到两小球在电场中的运动时间相同,不妨将这两个运动相串接,如图 2 所示:

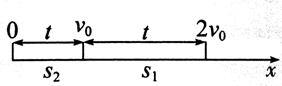


图 2

根据初速度为 0 的匀加速直线运动的规律有$\frac{s_1}{s_2}=3$.

● 解析

(2)设 A 点距电场上边界的高度为 h，小球下落 h 进入电场时在竖直方向的分速度为 v_y，

解法 1：运用速度三角形与位移三角形相似求解

由运动学公式得 $v_y^2=2gh$

由位移公式得 $H=v_yt+\frac{1}{2}gt^2$

小球 M 进入电场后做直线运动，如图 3 所示，由几何关系知

$$\frac{v_0}{v_y}=\frac{s_1}{H}$$

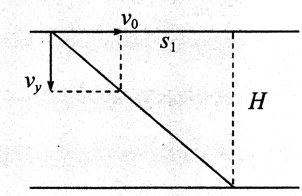


图3

联立 $v_0-at=0$，与 $s_1=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ 两式可解得 $h=\frac{1}{3}H$.

解法 2：运用两个速度三角形相似求解

小球 M 进入电场与离开电场时的速度关系如图 4 所示，根据相似规律可得

$$\frac{\sqrt{2gh}}{v_0}=\frac{\sqrt{2g(H+h)}}{v_M}$$

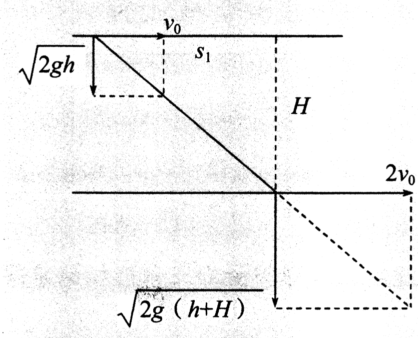


图4

又因为 $v_M=v_0+at=2v_0$，

可解得 $h=\frac{1}{3}H$.

解析

解法 3：运用加速度三角形与速度三角形相似求解

在进入电场前，两小球做平抛运动，时间 $t_1=\frac{v_y}{g}$

两小球在电场中的运动时间 $t=\frac{v_0}{a}$

如图 5 所示，小球 M 在电场中做直线运动，根据相似三角形规律可得 $\frac{v_y}{g}=\frac{v_0}{a}$

可得 $t_1=t$，

小球在竖直方向做自由落体运动，根据初速度为 0 的匀加速直线运动的推论可得 $h:H=1:3$，即 $h=\frac{1}{3}H$.

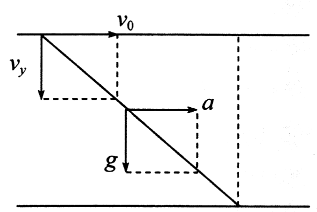


图5

(3)如图 6 所示，设电场强度的大小为 E，小球 M 进入电场后做直线运动.

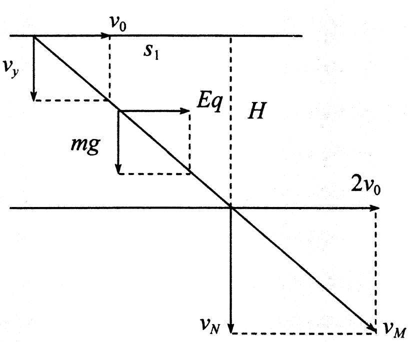


图6

解法 1：运用速度三角形与受力三角形相似求解

小球 M 在电场中做直线运动，根据相似规律可得 $\frac{v_0}{v_y}=\frac{Eq}{mg}$

又因为 $v_y=\sqrt{2gh}$

带电小球出电场时，M 与 N 粒子动能之比为 $3:2$，即 $E_{kM}=\frac{3}{2}E_{kN}$

●解析

又 $E_{kM}=\frac{1}{2}mv_M^2=\frac{1}{2}m[2g(H+h)+(2v_0)^2]$

$E_{kN}=\frac{1}{2}mv_N^2=\frac{1}{2}m\times 2g(H+h)$

联立可得 $E=\frac{mg}{\sqrt{2}q}$.

解法 2:运用受力三角形与位移三角形相似求解

小球 M 在电场中做直线运动,根据相似规律可得 $\frac{s_1}{H}=\frac{Eq}{mg}$

设 M、N 离开电场时的动能分别为 E_{kM}、E_{kN},由动能定理得

$E_{kM}=\frac{1}{2}m(v_0^2+v_y^2)+mgH+qEs_1$

$E_{kN}=\frac{1}{2}m(v_0^2+v_y^2)+mgH-qEs_2$

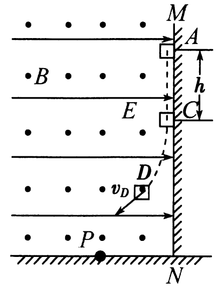
由已知条件 $E_{k1}=1.5E_{k2}$

联立可得 $E=\frac{mg}{\sqrt{2}q}$.

[感悟方法]

本题是电场和重力场叠加问题.由于重力场和匀强电场都是恒定场,所以粒子的运动轨迹只能是直线运动或是匀变速曲线运动,只要根据相应运动所对应的规律求解并不困难.

【例 2】(2015・**高考福建卷**)如图,绝缘粗糙的竖直平面 MN 左侧同时存在相互垂直的匀强电场和匀强磁场,电场方向水平向右,电场强度大小为 E,磁场方向垂直纸面向外,磁感应强度大小为 B.一质量为 m、电荷量为 q 的带正电的小滑块从 A 点由静止开始沿 MN 下滑,到达 C 点时离开 MN 做曲线运动.A、C 两点间距离为 h,重力加速度为 g.



(1)求小滑块运动到 C 点时的速度大小 v_C；

(2)求小滑块从 A 点运动到 C 点过程中克服摩擦力做的功 W_f；

(3)若 D 点为小滑块在电场力、洛伦兹力及重力作用下运动过程中速度最大的位置，当小滑块运动到 D 点时撤去磁场，此后小滑块继续运动到水平地面上的 P 点. 已知小滑块在 D 点时的速度大小为 v_D，从 D 点运动到 P 点的时间为 t，求小滑块运动到 P 点时速度的大小 v_P.

● 解析

(1)由题意知，根据左手定则可判断，滑块在下滑的过程中受水平向左的洛伦兹力，当洛伦兹力等于电场力 qE 时滑块离开 MN 开始做曲线运动，即 $Bqv=qE$

解得：$v_C=\dfrac{E}{B}$.

(2)从 A 到 C 根据动能定理：$mgh-W_f=\dfrac{1}{2}mv^2-0$

解得：$W_f=mgh-\dfrac{1}{2}m\dfrac{E^2}{B^2}$.

(3)**解法 1：正交分解法**

如图 1 所示，设小滑块在 D 的速度与竖直方向的夹角为 θ，则小滑块从 D 点到 P 点，有

水平方向：$v_{Px}=v_D\sin\theta-\dfrac{Eq}{m}t$

竖直方向：$v_{Py}=v_D\cos\theta+gt$

根据运动的合成规律有 $v_P=\sqrt{v_{Px}^2+v_{Py}^2}$

可以解得 $v_P=\sqrt{\dfrac{(mg)^2+(qE)^2}{m^2}t^2+v_D^2}$.

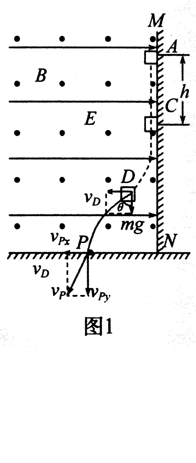


图1

●解析

解法 2:动能定理法

如图 1 所示,设小滑块在 D 的速度与竖直方向的夹角为 θ,则小滑块从 D 点到 P 点,有

水平方向:$x=v_D\sin\theta\cdot t-\dfrac{Eq}{2m}t^2$

竖直方向:$y=v_D\cos\theta\cdot t+\dfrac{1}{2}gt^2$

小滑块从 D 点到 P 点,由动能定理有

$mgy-qEx=\dfrac{1}{2}mv_P^2-\dfrac{1}{2}mv_D^2$

联立解得:$v_P=\sqrt{\dfrac{(mg)^2+(qE)^2}{m^2}t^2+v_D^2}$.

解法 3:等效转化法

设重力与电场力的合力为 F,由图 2 可知,在 D 点速度 v_D 的方向与 F 的方向垂直,从 D 到 P 做类平抛运动,在 F 方向做匀加速运动 $a=\dfrac{F}{m}$,t 时间内在 F 方向的位移为 $x=\dfrac{1}{2}at^2$

从 D 到 P,根据动能定理:$Fx=\dfrac{1}{2}mv_P^2-\dfrac{1}{2}mv_D^2$,

其中 $F=\sqrt{(mg)^2+(qE)^2}$

联立解得:$v_P=\sqrt{\dfrac{(mg)^2+(qE)^2}{m^2}t^2+v_D^2}$.

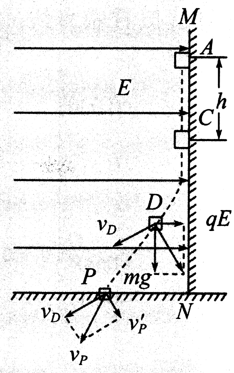


图2

●解析

［感悟方法］

本题是重力场、电场、磁场的复合，对这样的问题，我们要注意：

1. 洛伦兹力与状态有关

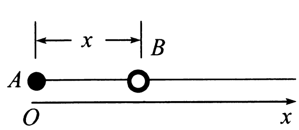
粒子受到的重力、电场力均为恒力，但受到的洛伦兹力却是一个与粒子运动状态有关的力，所以粒子运动的过程会比较复杂，从 A 到 C 做的是加速度增大的加速运动，到 C 点时离开竖直平面，此时电场力与洛伦兹力等大反向；粒子从 C 到 D 做变加速曲线运动.

2. 分解与合成相得益彰

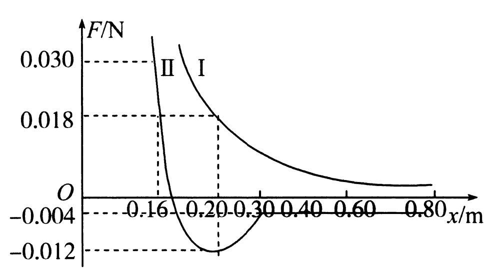
粒子从 D 到 P 的运动，只受到重力和电场力，做匀变速曲线运动. 对于匀变速典型运动求解速度的方法有两种：运动的合成与分解法以及动能定理法. 若用运动的合成与分解法，即正交分解法，那么可以选择重力和电场力两个方向建立坐标来处理，如解法 1；若用动能定理解法，在求合功时，我们既可以先求出两个力各自的功再求合功，如解法 2；也可以先求合力再求合功，如解法 3.

章节练习

1.（2016·高考上海卷）如图(a)所示，长度 $L=0.8$ m 的光滑杆左端固定一带正电的点电荷 A，其电荷量 $Q=1.8\times10^{-7}$ C；一质量 $m=0.02$ kg、带电荷量为 q 的小球 B 套在杆上. 将杆沿水平方向固定于某非均匀外电场中，以杆左端为原点，沿杆向右为 x 轴正方向建立坐标系. 点电荷 A 对小球 B 的作用力随 B 位置 x 的变化关系如图(b)中曲线Ⅰ所示，小球 B 所受水平方向的合力随 B 位置 x 的变化关系如图(b)中曲线Ⅱ所示，其中曲线Ⅱ在 $0.16\leqslant x\leqslant0.20$ 和 $x\geqslant0.40$ 范围可近似看做直线. 求：（静电力常量 $k=9\times10^{9}$ N·m²/C²）



(a)



(b)

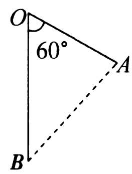
(1)小球 B 所带电荷量 q；

(2)非均匀外电场在 $x=0.3$ m 处沿细杆方向的电场强度大小 E；

(3)在合电场中，$x=0.4$ m 与 $x=0.6$ m 之间的电势差 U；

(4)已知小球在 $x=0.2$ m 处获得 $v=0.4$ m/s 的初速度时，最远可以运动到 $x=0.4$ m 处. 若小球在 $x=0.16$ m 处受到方向向右、大小为 0.04 N 的恒力作用后，由静止开始运动，为使小球能离开细杆，恒力作用的最小距离 s 是多少？

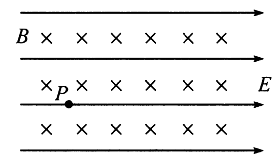
2.（2014·高考全国卷Ⅰ）如图，O、A、B为同一竖直平面内的三个点，OB沿竖直方向，$\angle BOA=60°$，$OB=\frac{3}{2}OA$，将一质量为m的小球以一定的初动能自O点水平向右抛出，小球在运动过程中恰好通过A点．使此小球带电，电荷量为$q(q>0)$，同时加一匀强电场，场强方向与$\triangle OAB$所在平面平行．现从O点以同样的初动能沿某一方向抛出此带电小球，该小球通过了A点，到达A点时的动能是初动能的3倍；若该小球从O点以同样的初动能沿另一方向抛出，恰好通过B点，且到达B点时的动能为初动能的6倍，重力加速度大小为g．求：



(1)无电场时，小球到达A点时的动能与初动能的比值；

(2)电场强度的大小和方向．

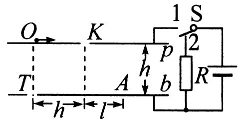
3. (2016·高考天津卷)如图所示,空间中存在着水平向右的匀强电场,电场强度大小为 $E=5\sqrt{3}$ N/C,同时存在着水平方向的匀强磁场,其方向与电场方向垂直,磁感应强度大小 $B=0.5$ T.有一带正电的小球,质量 $m=1\times10^{-6}$ kg,电荷量 $q=2\times10^{-6}$ C,正以速度 v 在图示的竖直面内做匀速直线运动,当经过 P 点时撤掉磁场(不考虑磁场消失引起的电磁感应现象),取 $g=10\text{m/s}^2$,求:



(1)小球做匀速直线运动的速度 v 的大小和方向;

(2)从撤掉磁场到小球再次穿过 P 点所在的这条电场线经历的时间 t.

4.(2014·高考四川卷)如图所示,水平放置的不带电的平行金属板 p 和 b 相距 h,与图示电路相连,金属板厚度不计,忽略边缘效应. p 板上表面光滑,涂有绝缘层,其上 O 点右侧相距 h 处有小孔 K;b 板上有小孔 T,且 O、T 在同一条竖直线上,图示平面为竖直平面.质量为 m、电荷量为 $-q$ $(q>0)$ 的静止粒子被发射装置(图中未画出)从 O 点发射,沿 p 板上表面运动时间 t 后到达 K 孔,不与板碰撞地进入两板之间.粒子视为质点,在图示平面内运动,电荷量保持不变,不计空气阻力,重力加速度大小为 g.



(1)求发射装置对粒子做的功;

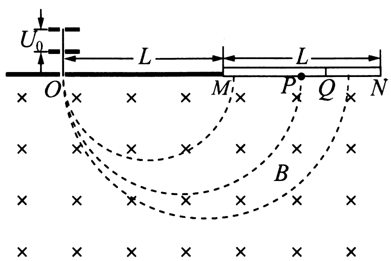
(2)电路中的直流电源内阻为 r,开关 S 接"1"位置时,进入板间的粒子落在 b 板上的 A 点,A 点与过 K 孔竖直线的距离为 l.此后将开关 S 接"2"位置,求阻值为 R 的电阻中的电流强度;

(3)若选用恰当直流电源,电路中开关 S 接"1"位置,使进入板间的粒子受力平衡,此时在板间某区域加上方向垂直于图面的、磁感应强度大小合适的匀强磁场(磁感应强度 B 只能在 $0\sim B_m=\dfrac{(\sqrt{21}+5)m}{(\sqrt{21}-2)qt}$ 范围内选取),使粒子恰好从 b 板的 T 孔飞出,求粒子飞出时速度方向与 b 板板面的夹角的所有可能值(可用反三角函数表示).

第十二讲 带电粒子运动对接高新科技

典例剖析

【例 1】(2015·高考江苏卷)一台质谱仪的工作原理如图所示,电荷量均为$+q$、质量不同的离子飘入电压为U_0的加速电场,其初速度几乎为零.这些离子经加速后通过狭缝O沿着与磁场垂直的方向进入磁感应强度为B的匀强磁场,最后打在底片上.已知放置底片的区域$MN=L$,且$OM=L$.某次测量发现MN中左侧$\frac{2}{3}$区域MQ损坏,检测不到离子,但右侧$\frac{1}{3}$区域QN仍能正常检测到离子.在适当调节加速电压后,原本打在MQ的离子即可在QN检测到.



(1)求原本打在MN中点P的离子质量m;

(2)为使原本打在P的离子能打在QN区域,求加速电压U的调节范围;

(3)为了在QN区域将原本打在MQ区域的所有离子检测完整,求需要调节U的最少次数.(取 lg 2=0.301,lg 3=0.477,lg 5=0.699)

●解析

(1)离子在电场中加速 $qU_0=\frac{1}{2}mv^2$

在磁场中做匀速圆周运动 $qvB=m\frac{v^2}{r_0}$

解得 $r_0=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU_0}{q}}$

代入 $r_0=\frac{3}{4}L$,解得 $m=\frac{9qB^2L^2}{32U_0}$.

●解析

(2)由(1)知，$U=\dfrac{16U_0r^2}{9L^2}$

离子打在 Q 点 $r=\dfrac{5}{6}L$，$U=\dfrac{100U_0}{81}$

离子打在 N 点 $r=L$，$U=\dfrac{16U_0}{9}$

则电压的范围 $\dfrac{100U_0}{81}\leqslant U\leqslant\dfrac{16U_0}{9}$.

(3)**解法 1：搬家法——从右往左搬**

“为了在 QN 区域将原本打在 MQ 区域的所有离子检测完整”也就是把原先打在 MQ 的离子搬到 QN. 调节 U 的次数就是“搬”的次数. 我们可以考虑从右端开始“搬”.

由(1)可知，$r\propto\sqrt{U}$

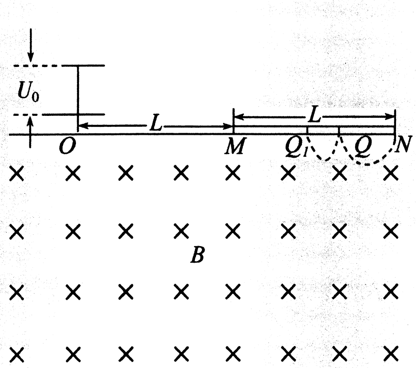
由题意知，第 1 次调节电压到 U_1，使原本 Q 点的离子打在 N 点，如图甲所示有

$$\frac{L}{\frac{5}{6}L}=\frac{\sqrt{U_1}}{\sqrt{U_0}}$$

此时，原本半径为 r_1 的打在 Q_1 的离子打在 Q 上

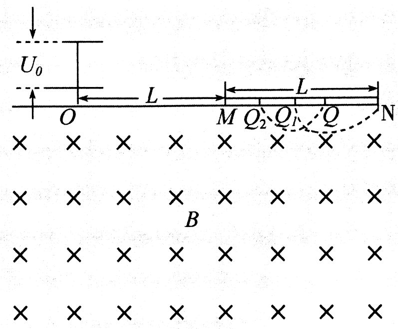
$$\frac{\frac{5}{6}L}{r_1}=\frac{\sqrt{U_1}}{\sqrt{U_0}}$$

解得 $r_1=\left(\dfrac{5}{6}\right)^2L$



图甲

解析



图乙

第 2 次调节电压到 U_2，原本打在 Q_1 的离子打在 N 点，原本半径为 r_2 的打在 Q_2 的离子打在 Q 上，如图乙所示有 $\frac{L}{r_1}=\frac{\sqrt{U_2}}{\sqrt{U_0}}$，$\frac{\frac{5}{6}L}{r_2}=\frac{\sqrt{U_2}}{\sqrt{U_0}}$

解得 $r_2=\left(\frac{5}{6}\right)^3L$

同理，第 n 次调节电压，有 $r_n=\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}L$

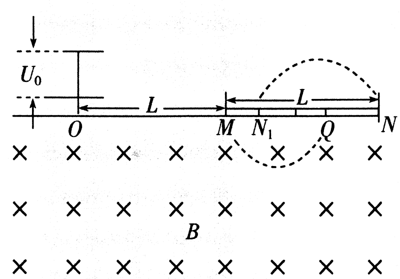
检测完整，有 $r_n\leqslant\frac{L}{2}$

解得 $n\geqslant\frac{\lg 2}{\lg\left(\frac{6}{5}\right)}-1\approx 2.8$

最少次数为 3 次.

解法 2：搬家法——从左往右搬

下面，我们考虑从左端开始"搬"，如图丙所示.



图丙

解析

由(1)可知，$r\propto\sqrt{U}$，

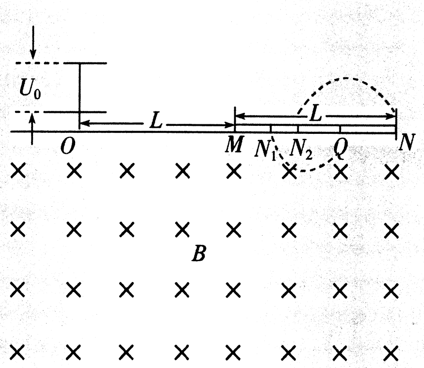
第一次调节，使原本打在 M 的离子打在 Q 点，此时调节到的电压为 U_1，如图丙有

$$\frac{\frac{5L}{6}}{\frac{L}{2}}=\frac{\sqrt{U_1}}{\sqrt{U_0}}$$

此时，原本半径为 r_1 打在 N_1 的离子打在了 N 点，则

$$\frac{L}{r_1}=\frac{\sqrt{U_1}}{\sqrt{U_0}}$$

解得 $r_1=\frac{6}{5}\times\frac{L}{2}$



图丁

第二次调节，使原本打在 N_1 的离子打在 Q 点，此时调节到的电压为 U_2，如图丁有

$$\frac{\frac{5L}{6}}{r_1}=\frac{\sqrt{U_2}}{\sqrt{U_0}}$$

此时，原本半径为 r_2 的打在 N_2 的离子打在 N 上，则

$$\frac{L}{r_2}=\frac{\sqrt{U_2}}{\sqrt{U_0}}$$

解得 $r_2=\frac{6}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{L}{2}=(\frac{6}{5})^2\times\frac{L}{2}$

●解析

以此类推，可得到第 n 次调压，有 $r_n=(\frac{6}{5})^n\times\frac{L}{2}$

检测完整，有 $r_n\geqslant\frac{5}{6}L$

可解得 $n\geqslant 2.8$，即最少要调压 3 次.

[**感悟方法**]

本题最大的难点是在第(3)小题，我们可以作些试探性分析：

1. **定性分析**：要能在 QN 检测出所有 MQ 间的离子，则要调节电压变大，使离子运动半径变大.

2. **定量判断**：能不能一次性调压实现呢？

可以有两种思考：求出使得原先打在 M 的粒子打在 Q 点所需要的电压，发现在这个电压下，原先打中 Q 点的粒子已经超出 N 点；也可以求出原先打在 Q 点的粒子打在 N 点所需要的电压，发现在这个电压下，原先打在 M 点的粒子已经超出了 Q 点. 看来，一次是不可行的.

3. **选定方案**：多次调压，逐步实现.

有了定性分析与定量判断，我们能领会出问题的本质就是对粒子的多次“搬家”，既然是“搬家”，自然是可以从左边开始，也可以从右边开始，这正是多解思路的来源.

【例 2】(2016・高考江苏卷)回旋加速器的工作原理如图 1 所示，置于真空中的 D 形金属盒半径为 R，两盒间狭缝的间距为 d，磁感应强度为 B 的匀强磁场与盒面垂直，被加速粒子的质量为 m、电荷量为 $+q$，加在狭缝间的交变电压如图 2 所示，电压值的大小为 U_0，周期 $T=\frac{2\pi m}{qB}$. 一束该种粒子在 $t=0\sim\frac{T}{2}$ 时间内从 A 处均匀地飘入狭缝，其初速度视为零。现考虑粒子在狭缝中的运动时间，假设能够出射的粒子每次经过狭缝均做加速运动，不考虑粒子间的相互作用. 求：

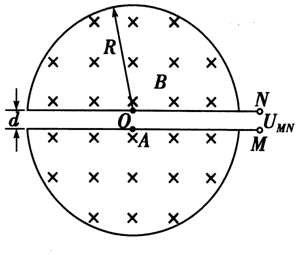


图 1

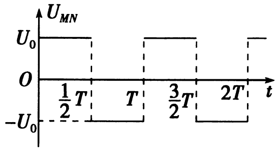


图 2

(1)出射粒子的动能 E_m；

(2)粒子从飘入狭缝至动能达到 E_m 所需的总时间 t_0；

(3)要使飘入狭缝的粒子中有超过 99%能射出，d 应满足的条件.

●解析

(1)粒子经过电场加速、磁场偏转，最终沿 D 形盒边界射出，即粒子运动的动能最大时，粒子的半径最大为 R.

粒子在磁场中做圆周运动，

有 $qvB=m\dfrac{v^2}{R}$

且 $E_m=\dfrac{1}{2}mv^2$

解得 $E_m=\dfrac{q^2B^2R^2}{2m}$.

(2)**解法 1：分段累积法**

粒子从飘入狭缝至动能达到 E_m 所需的总时间 t_0 由两部分组成，一部分是在电场中的时间，另一部分是在磁场中的时间.

粒子被加速 n 次达到动能 E_m，则 $E_m=nqU_0$

在磁场里的时间，$t=(n-1)\times\dfrac{T}{2}$

在电场中，因为在电场中加速的时间每一次不相等，设第 1 次为 t_1，第 2 次为 t_2，第 3 次为 t_3，…第 n 次为 t_n，每次加速后的轨道半径分别为 r_1、r_2、r_3…r_n，粒子在狭缝间做匀加速运动，设 n 次经过狭缝的总时间为 Δt

加速度 $a=\dfrac{qU_0}{md}$

则：$t_1=\dfrac{v_1}{a}=\dfrac{qB}{ma}r_1$，

$t_2=\dfrac{v_2-v_1}{a}=\dfrac{qB}{ma}(r_2-r_1)$

$t_3=\dfrac{v_3-v_2}{a}=\dfrac{qB}{ma}(r_3-r_2)$

…

解析

$t_n=\dfrac{v_n-v_{n-1}}{a}=\dfrac{qB}{ma}(R-r_{n-1})$

在电场中加速的总时间为

$\Delta t=t_1+t_2+t_3+\cdots+t_n$

$=\dfrac{qB}{ma}[r_1+(r_2-r_1)+(r_3-r_2)+\cdots\cdots+(R-r_{n-1})]$

$=\dfrac{qB}{ma}R$

$=\dfrac{dBR}{U_0}$

由 $t_0=t+\Delta t$

解得 $t_0=\dfrac{\pi BR^2+2BRd}{2U_0}-\dfrac{\pi m}{qB}$.

解法 2:整体分析法

粒子被加速 n 次达到动能 E_m,

则 $E_m=nqU_0$

在磁场里的时间,$t=(n-1)\times\dfrac{T}{2}$

粒子在狭缝间做匀加速运动,将各段匀加速运动的部分合并到一起,可以整体看成一个初速度为零的匀加速直线运动,设 n 次经过狭缝的总时间为 Δt

加速度 $a=\dfrac{qU_0}{md}$

匀加速直线运动 $nd=\dfrac{1}{2}a\cdot(\Delta t)^2$

由 $t_0=(n-1)\cdot\dfrac{T}{2}+\Delta t$

解得 $t_0=\dfrac{\pi BR^2+2BRd}{2U_0}-\dfrac{\pi m}{qB}$.

●解析

(3)只有在 $0\sim\left(\frac{T}{2}-\Delta t\right)$时间内飘入的粒子才能每次均被加速

则所占的比例为 $\eta=\dfrac{\frac{T}{2}-\Delta t}{\frac{T}{2}}$

由 $\eta>99\%$，解得 $d<\dfrac{\pi mU_0}{100qB^2R}$.

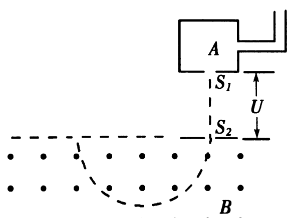
[**感悟方法**]

对于回旋加速器，我们要注意以下几点：

1. 要实现回旋加速粒子在磁场中运动的周期等于交变电压的周期.
2. 根据 $E_m=\dfrac{q^2B^2R^2}{2m}$可知，粒子加速的最大速度仅与磁场强度 B、D 形盒半径 R 以及粒子本质的荷质比$\dfrac{q}{m}$有关，与电场强度 E 的大小及加速的次数无关.
3. 粒子在 D 形盒磁场中回旋的总时间为 $t_B=n\dfrac{T}{2}$，而不是 $t_B=nT$，因为每半周加速 1 次.
4. 粒子在电场中的时间 $t_E\ll t_B$，一般粗略运算中可以忽略；若要精确计算，可以将粒子在电场中的运动整体处理为初速度为零的匀加速直线运动.

章节练习

1. (2012·高考天津卷)对铀 235 的进一步研究在核能的开发和利用中具有重要意义. 如图所示，质量为 m、电荷量为 q 的铀 235 离子，从容器 A 下方的小孔 S_1 不断飘入加速电场，其初速度可视为零，然后经过小孔 S_2 垂直于磁场方向进入磁感应强度为 B 的匀强磁场中，做半径为 R 的匀速圆周运动. 离子行进半个圆周后离开磁场并被收集，离开磁场时离子束的等效电流为 I. 不考虑离子重力及离子间的相互作用.

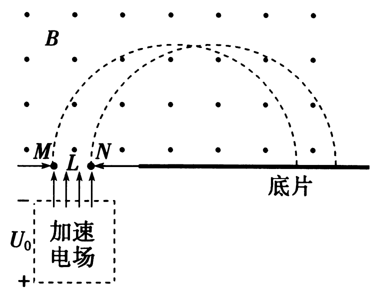


(1)求加速电场的电压 U；

(2)求出在离子被收集的过程中任意时间 t 内收集到离子的质量 M；

(3)实际上加速电压的大小会在 $U\pm\Delta U$ 范围内微小变化.若容器 A 中有电荷量相同的铀 235 和铀 238 两种离子，如前述情况它们经电场加速后进入磁场中会发生分离，为使这两种离子在磁场中运动的轨迹不发生交叠，$\frac{\Delta U}{U}$应小于多少？(结果用百分数表示，保留两位有效数字)

2.(2017·高考江苏卷)一台质谱仪的工作原理如图所示.大量的甲、乙两种离子飘入电压为U_0的加速电场,其初速度几乎为0,经加速后,通过宽为L的狭缝MN沿着与磁场垂直的方向进入磁感应强度为B的匀强磁场中,最后打到照相底片上.已知甲、乙两种离子的电荷量均为$+q$,质量分别为$2m$和m,图中虚线为经过狭缝左、右边界M、N的甲种离子的运动轨迹.不考虑离子间的相互作用.

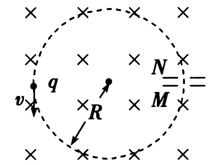


(1)求甲种离子打在底片上的位置到N点的最小距离x;

(2)在图中用斜线标出磁场中甲种离子经过的区域,并求该区域最窄处的宽度d;

(3)若考虑加速电压有波动,在$(U_0-\Delta U)$到$(U_0+\Delta U)$之间变化,要使甲、乙两种离子在底片上没有重叠,求狭缝宽度L满足的条件.

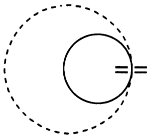
3.(2014·高考天津卷)同步加速器在粒子物理研究中有重要的应用,其基本原理简化为如图所示的模型.M、N为两块中心开有小孔的平行金属板.质量为m、电荷量为$+q$的粒子A(不计重力)从M板小孔飘入板间,初速度可视为零.每当A进入板间,两板的电势差变为U,粒子得到加速,当A离开N板时,两板的电荷量均立即变为零.两板外部存在垂直纸面向里的匀强磁场,A在磁场作用下做半径为R的圆周运动,R远大于板间距离.A经电场多次加速,动能不断增大,为使R保持不变,磁场必须相应地变化.不计粒子加速时间及其做圆周运动产生的电磁辐射,不考虑磁场变化对粒子速度的影响及相对论效应.求:

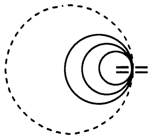


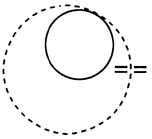
(1)A运动第1周时磁场的磁感应强度B_1的大小;

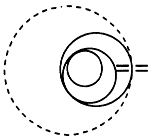
(2)在A运动第n周的时间内电场力做功的平均功率$\overline{P}_n$;

(3)若有一个质量也为m、电荷量为$+kq$(k为大于1的整数)的粒子B(不计重力)与A同时从M板小孔飘入板间,A、B初速度均可视为零,不计两者间的相互作用,除此之外,其他条件均不变.下图中虚线、实线分别表示A、B的运动轨迹.在B的轨迹半径远大于板间距离的前提下,请指出哪个图能定性地反映A、B的运动轨迹,并经推导说明理由.

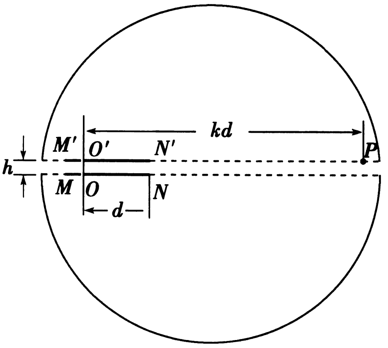

A


B


C


D

4.(2015·高考重庆卷)如图为某种离子加速器的设计方案.两个半圆形金属盒内存在相同的垂直于纸面向外的匀强磁场.其中 MN 和 $M'N'$ 是间距为 h 的两平行极板,其上分别有正对的两个小孔 O 和 O',$O'N'=ON=d$,P 为靶点,$O'P=kd$(k 为大于1的整数).极板间存在方向向上的匀强电场,两极板间电压为 U.质量为 m、带电量为 q 的正离子从 O 点由静止开始加速,经 O' 进入磁场区域.当离子打到极板上 $O'N'$ 区域(含 N' 点)或外壳上时将会被吸收,两虚线之间的区域无电场和磁场存在,离子可匀速穿过,忽略相对论效应和离子所受的重力.求:



(1)离子经过电场仅加速一次后能打到 P 点所需的磁感应强度大小;

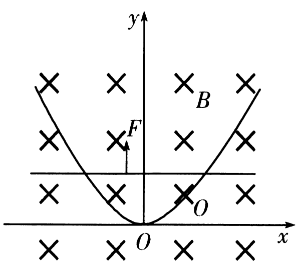
(2)能使离子打到 P 点的磁感应强度的所有可能值;

(3)打到 P 点的能量最大的离子在磁场中运动的时间和在电场中运动的时间.

第十三讲 “发电类”模型问题

典例剖析

【例 1】(2016·高考上海卷)如图所示，一关于 y 轴对称的导体轨道位于水平面内，磁感应强度为 B 的匀强磁场与平面垂直.一足够长、质量为 m 的直导体棒沿 x 方向置于轨道上，在外力 F 作用下从原点由静止开始沿 y 轴正方向做加速度为 a 的匀加速直线运动，运动时棒与 x 轴始终平行.棒单位长度的电阻为 ρ，与电阻不计的轨道接触良好，运动中产生的热功率随棒位置的变化规律为 $P_r=ky^{\frac{3}{2}}$(SI).求：



(1)导体轨道的轨道方程 $y=f(x)$；

(2)棒在运动过程中受到的安培力 F_m 随 y 的变化关系；

(3)棒从 $y=0$ 运动到 $y=L$ 过程中外力 F 的功.

解析

(1)根据纯电阻电路中的能量转化结合本题题意，导体棒运动过程中回路产生的热功率等于回路中感应电流的做功功率，也等于克服安培力做功的功率.因此，本小题有两种基本的解法.

解法 1：能量守恒——回路发热功率等于电流做功的功率

设棒运动到某一位置时与轨道接触点的坐标为($\pm x,y$)，速度为 v，根据法拉第电磁感应定律，可得感应电动势 $E=B(2x)v$

感应电流做功的功率 $P=\dfrac{E^2}{R}$

根据题意，运动中产生的热功率 $P_r=ky^{\frac{3}{2}}$

●解析

根据能量守恒，有 $P=P_r$

棒做匀加速运动 $v^2=2ay$

又有 $R=2\rho x$

联列各式可得 $y=\left(\frac{4aB^2}{k\rho}\right)^2x^2$，轨道形状为抛物线.

解法2：能量守恒——回路发热功率等于克服安培力做功的功率

设棒运动到某一位置时与轨道接触点的坐标为$(\pm x,y)$，速度为 v

安培力 $F=\frac{B^2l^2v}{R}=\frac{B^2(2x)^2v}{R}$

安培力的功率 $P=Fv=\frac{4B^2x^2v^2}{R}$

根据题意，运动中产生的热功率 $P_r=ky^{\frac{3}{2}}$

根据能量守恒，有 $P=P_r$

棒做匀加速运动 $v^2=2ay$

又有 $R=2\rho x$

联列各式可得 $y=\left(\frac{4aB^2}{k\rho}\right)^2x^2$，轨道形状为抛物线.

(2)安培力 $F_m=\frac{4B^2x^2}{R}v=\frac{2B^2x}{\rho}\sqrt{2ay}$

以轨道方程代入得 $F_m=\frac{k}{\sqrt{2a}}y$.

(3)导体棒向上做匀加速运动，根据牛顿第二定律可得 $F-F_m=ma$

可得 $F=F_m+ma=\frac{k}{\sqrt{2a}}y+ma$

外力 F 与位移 y 成正比，即力 F 随位移 y 呈线性变化. 对于这类变力做功，可以通过以下几种方法来求解.

解法1：转化为平均力求解

当 $y=0$ 时，外力 $F_0=ma$

●解析

当 $y=L$ 时，外力 $F_1=\frac{k}{\sqrt{2a}}L+ma$

外力 F 随位移 y 呈线性变化，平均力 $\overline{F}=\frac{F_0+F_1}{2}$

外力 F 做功 $W=\overline{F}L$

可得 $W=\frac{k}{2\sqrt{2a}}L^2+maL$.

解法 2：运用微积分求解

虽然外力 F 为变力，但如果将整个过程分成 n 个微小过程，当 n 足够大时，每一个微小过程中外力 F 都可以被看成恒力，求出每小段外力 F 所做的功，然后将所有的微小段内做的功累加起来，就是整个过程外力 F 做的功.

在每一微小段内，位移为 $\mathrm{d}y$，外力做功 $\mathrm{d}W=F\cdot \mathrm{d}y=(\frac{k}{\sqrt{2a}}y+ma)\mathrm{d}y$

所以，外力做的总功 $W=\int_0^L(\frac{k}{\sqrt{2a}}y+ma)\mathrm{d}y=\frac{k}{2\sqrt{2a}}L^2+maL$.

解法 3：运用动能定理求解

对棒的运动过程，根据动能定理得 $W-W_m=\frac{1}{2}mv^2$

安培力做功 $W_m=\frac{k}{2\sqrt{2a}}L^2$

棒在 $y=L$ 处棒的速度 $v=\sqrt{2ay}=\sqrt{2aL}$

动能 $E_\mathrm{k}=\frac{1}{2}mv^2=maL$

外力做功 $W=\frac{k}{2\sqrt{2a}}L^2+maL$.

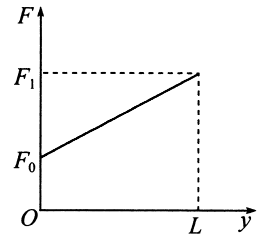
解法 4：运用图象方法求解

考虑到功是力在位移上的累积，而这种累积的效果往往与图象的“面积”相对应，我们不妨画出外力 F 与位移 y 的关系图象.

如图所示，当 $y=0$ 时，外力 $F_0=ma$

当 $y=L$ 时，外力 $F_1=\frac{k}{\sqrt{2a}}L+ma$

●解析



外力做功等于图线与 y 轴所围成的面积大小，

所以 $W=\frac{F_0+F_1}{2}L$

联列各式可得 $W=\frac{k}{2\sqrt{2a}}L^2+maL.$

［**感悟方法**］

本题的求解，让我们明确了一个关系，学会了一个方法：

1. **一个关系：安培力做负功与能量转化的关系**

导体棒运动过程中克服安培力做的功等于回路中感应电流的做功，等于机械能转化为电能的能量，如果回路是纯电阻电路，那么也等于回路产生的焦耳热量.

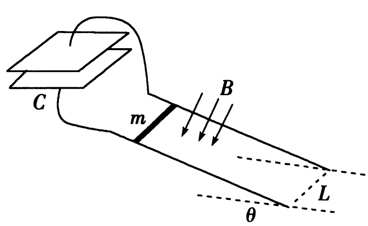
2. **一个方法：变力做功的方法**

对于变力做功，总体来讲，我们采用“转化”的方法. 转化的基本策略有二：

一个是将变力转化为恒力，如转化为平均力，微元法等；

另一个是将变力做的功转化为求解其他等效的量，比如通过动能定理，将做功转化为能量的变化；将做功转化为求图象的面积等.

【例 2】(2013·**高考全国卷Ⅰ**)如图，两条平行导轨所在平面与水平地面的夹角为 θ，间距为 L. 导轨上端接有一平行板电容器，电容为 C. 导轨处于匀强磁场中，磁感应强度大小为 B，方向垂直于导轨平面. 在导轨上放置一质量为 m 的金属棒，棒可沿导轨下滑，且在下滑过程中保持与导轨垂直并良好接触. 已知金属棒与导轨之间的动摩擦因数为 μ，重力加速度大小为 g. 忽略所有电阻. 让金属棒从导轨上端由静止开始下滑，求：



(1)电容器极板上积累的电荷量与金属棒速度大小的关系；

(2)金属棒的速度大小随时间变化的关系.

●解析

(1)设金属棒下滑的速度大小为 v,则感应电动势为 $E=BLv$ ①

平行板电容器两极板之间的电势差为 $U=E$ ②

设此时电容器极板上积累的电荷量为 Q,按定义有 $C=\dfrac{Q}{U}$ ③

联立①②③式得 $Q=CBLv$. ④

(2)**解法 1:动力学观点**

设金属棒的速度大小为 v 时经历的时间为 t,通过金属棒的电流为 i. 金属棒受到的磁场的作用力方向沿导轨向上,大小为 $f_1=BLi$ ⑤

设在时间间隔$(t,t+\Delta t)$内流经金属棒的电荷量为 ΔQ,据定义有 $i=\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ ⑥

ΔQ 也是平行板电容器极板在时间间隔$(t,t+\Delta t)$内增加的电荷量. 由④式得

$\Delta Q=CBL\Delta v$ ⑦

式中,Δv 为金属棒的速度变化量

根据定义有 $a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ ⑧

金属棒所受到的摩擦力方向斜向上,大小为 $f_2=\mu N$ ⑨

式中,N 是金属棒对导轨的正压力的大小,有 $N=mg\cos\theta$ ⑩

金属棒在时刻 t 的加速度方向沿斜面向下,设其大小为 a,根据牛顿第二定律有

$mg\sin\theta-f_1-f_2=ma$ ⑪

联立⑤至⑪式得 $a=\dfrac{m(\sin\theta-\mu\cos\theta)}{m+B^2L^2C}g$ ⑫

由⑫式及题设可知,金属棒做初速度为零的匀加速直线运动. t 时刻金属棒的速度大小为

$v=\dfrac{m(\sin\theta-\mu\cos\theta)}{m+B^2L^2C}gt$. ⑬

解法 2:动量观点

设金属棒的速度大小为 v 时经历的时间为 t,由动量定理有

$(mg\sin\theta-\mu mg\cos\theta-BIL)\cdot t=mv$

根据电流的定义式可得 $Q=It$

●解析

根据电容的定义式可得 $Q=CU$

根据法拉第电磁感应定律有 $U=BLv$

联立解得 $v=\frac{m(\sin\theta-\mu\cos\theta)}{m+B^2L^2C}gt$.

解法3:能量观点

设金属棒下滑距离 s 时,瞬时速度为 v,则电容器两极板电压 $U=BLv$

电容器充电储存的能量为 $E=\frac{1}{2}QU=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}B^2L^2Cv^2$

根据能量守恒有

$mgs\sin\theta=\mu mgs\cos\theta+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}B^2L^2Cv^2$

可得 $v^2=\frac{2mg(\sin\theta-\mu\cos\theta)s}{m+B^2L^2C}$

通过与 $v^2=2as$ 等效类比,发现金属棒沿导轨加速度 $a=\frac{mg(\sin\theta-\mu\cos\theta)}{m+B^2L^2C}$

金属棒匀加速下滑.则 $v=at=\frac{m(\sin\theta-\mu\cos\theta)}{m+B^2L^2C}gt$.

[**感悟方法**]

通过本题,我们学会了探究变速直线运动的三种基本方法:

1. **微元法**

导体棒做变速直线运动,可以用微元法切入,从电荷量的微元 ΔQ 与时间微元 Δt 出发,转化到速度微元 Δv 与时间微元 Δt,得出导体棒加速度 a,将运动学与动力学联系起来.

2. **动量定理法**

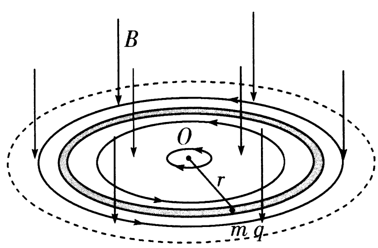
如果说微元法是从微观入手探寻导体棒的宏观运动规律,那么动量定理就是从宏观入手探寻导体棒的运动规律.

3. **能量守恒法**

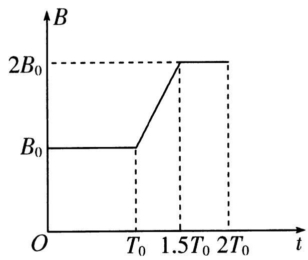
能量守恒法是从更立体的思维入手,按照自然界最普遍的"不变原则"来探寻导体棒的运动规律,最终巧妙地与匀变速直线运动的规律联系在一起.

章节练习

1.(2012·高考福建卷)如图甲,在圆柱形区域内存在一方向竖直向下、磁感应强度大小为 B 的匀强磁场,在此区域内,沿水平面固定一半径为 r 的圆环形光滑细玻璃管,环心 O 在区域中心.一质量为 m、带电荷量为 $q(q>0)$ 的小球,在管内沿逆时针方向(从上向下看)做圆周运动.已知磁感应强度大小 B 随时间 t 的变化关系如图乙所示,其中 $T_0=\frac{2\pi m}{qB_0}$.设小球在运动过程中电荷量保持不变,对原磁场的影响可忽略.



甲



乙

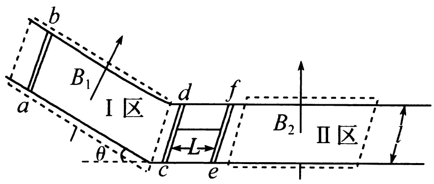
(1)在 $t=0$ 到 $t=T_0$ 这段时间内,小球不受细管侧壁的作用力,求小球的速度大小 v_0;

(2)在竖直向下的磁感应强度增大过程中,将产生涡旋电场,其电场线是在水平面内一系列沿逆时针方向的同心圆,同一条电场线上各点的场强大小相等.试求 $t=T_0$ 到 $t=1.5T_0$ 这段时间内:

①细管内涡旋电场的场强大小 E;

②电场力对小球做的功 W.

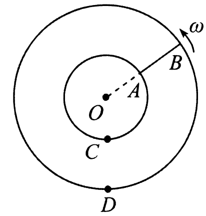
2.(2017·浙江4月)间距为 l 的两平行金属导轨由水平部分和倾斜部分平滑连接而成，如图所示.倾角为 θ 的导轨处于大小为 B_1、方向垂直导轨平面向上的匀强磁场区间Ⅰ中.水平导轨上的无磁场区间静止放置一质量为 $3m$ 的“联动双杆”(由两根长为 l 的金属杆 cd 和 ef，用长度为 L 的刚性绝缘杆连接构成)，在“联动双杆”右侧存在大小为 B_2、方向垂直导轨平面向上的匀强磁场区间Ⅱ，其长度大于 L.质量为 m、长为 l 的金属杆 ab 从倾斜导轨上端释放，达到匀速后进入水平导轨(无能量损失)，杆 ab 与“联动双杆”发生碰撞，碰后杆 ab 和 cd 合在一起形成“联动三杆”.“联动三杆”继续沿水平导轨进入磁场区间Ⅱ并从中滑出.运动过程中，杆 ab、cd 和 ef 与导轨始终接触良好，且保持与导轨垂直.已知杆 ab、cd 和 ef 电阻均为 $R=0.02\ \Omega$，$m=0.1\ \text{kg}$，$l=0.5\ \text{m}$，$L=0.3\ \text{m}$，$\theta=30^\circ$，$B_1=0.1\ \text{T}$，$B_2=0.2\ \text{T}$.不计摩擦阻力和导轨电阻，忽略磁场边界效应.求：



(1) 杆 ab 在倾斜导轨上匀速运动时的速度大小 v_0；

(2)“联动三杆”进入磁场区间Ⅱ前的速度大小 v；

(3)“联动三杆”滑过磁场区间Ⅱ产生的焦耳热 Q.

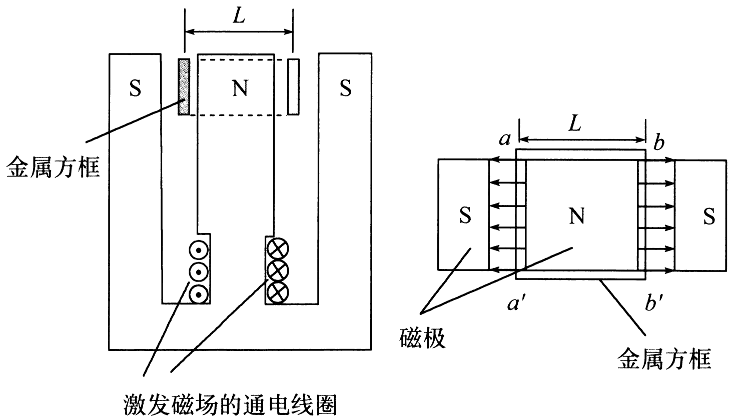


3.(2014·高考全国卷Ⅱ)半径分别为 r 和 $2r$ 的同心圆形导轨固定在同一水平面内，一长为 r，质量为 m 且质量分布均匀的直导体棒 AB 置于圆导轨上面，BA 的延长线通过圆导轨中心 O，装置的俯视图如图所示. 整个装置位于一匀强磁场中，磁感应强度的大小为 B，方向竖直向下. 在内圆导轨的 C 点和外圆导轨的 D 点之间接有一阻值为 R 的电阻(图中未画出). 直导体棒在水平外力作用下以角速度 ω 绕 O 逆时针匀速转动，在转动过程中始终与导轨保持良好接触. 设导体棒与导轨之间的动摩擦因数为 μ，导体棒和导轨的电阻均可忽略. 重力加速度大小为 g. 求：

(1)通过电阻 R 的感应电流的方向和大小；

(2)外力的功率.

4. (2007·高考北京卷)用密度为 d、电阻率为 ρ、横截面积为 A 的薄金属条制成边长为 L 的闭合正方形框 $abb'a'$. 如图所示,金属方框水平放在磁极的狭缝间,方框平面与磁场方向平行. 设匀强磁场仅存在于相对磁极之间,其他地方的磁场忽略不计. 可认为方框的 aa' 边和 bb' 边都处在磁极之间,极间磁感应强度大小为 B. 方框从静止开始释放,其平面在下落过程中保持水平(不计空气阻力).



装置纵截面示意图　　装置俯视示意图

(1)求方框下落的最大速度 v_m(设磁场区域在竖直方向足够长);

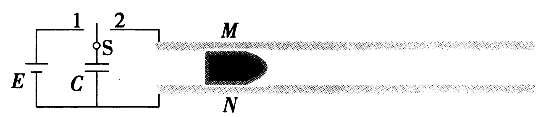
(2)当方框下落的加速度为 $\frac{g}{2}$ 时,求方框的发热功率 P;

(3)已知方框下落时间为 t 时,下落高度为 h,其速度为 $v_t(v_t<v_m)$. 若在同一时间 t 内,方框内产生的热与一恒定电流 I_0 在该框内产生的热相同,求恒定电流 I_0 的表达式.

第十四讲 “电动类”模型问题

典例剖析

【例 1】(2017·高考天津卷)电磁轨道炮利用电流和磁场的作用使炮弹获得超高速度,其原理可用来研制新武器和航天运载器.电磁轨道炮示意如图,图中直流电源电动势为 E,电容器的电容为 C.两根固定于水平面内的光滑平行金属导轨间距为 l,电阻不计.炮弹可视为一质量为 m、电阻为 R 的金属棒 MN,垂直放在两导轨间处于静止状态,并与导轨良好接触.首先开关 S 接 1,使电容器完全充电.然后将 S 接至 2,导轨间存在垂直于导轨平面、磁感应强度大小为 B 的匀强磁场(图中未画出),MN 开始向右加速运动.当 MN 上的感应电动势与电容器两极板间的电压相等时,回路中电流为零,MN 达到最大速度,之后离开导轨.问:



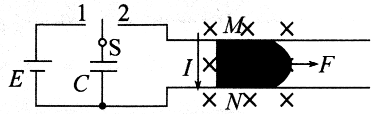
(1)磁场的方向;

(2)MN 刚开始运动时加速度 a 的大小;

(3)MN 离开导轨后电容器上剩余的电荷量 Q 是多少.

解析

(1)如图甲所示,通过炮弹的电流从 M 到 N,受到的安培力向右,根据左手定则,可以判定磁场方向垂直于导轨平面向下.



甲

(2)电容器完全充电后,两极板间电压为 E,当开关 S 接 2 时,电容器放电,设刚放电时,炮弹可以看做是“纯电阻”,流经 MN 的电流为 I,有 $I=\dfrac{E}{R}$ ①

设 MN 受到的安培力为 F,有 $F=IlB$ ②

● 解析

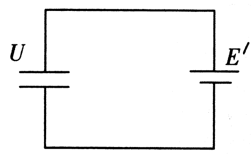
由牛顿第二定律，有 $F=ma$ ③

联立①②③式得 $a=\dfrac{BlE}{mR}$. ④

(3)当电容器充电完毕时，设电容器上电荷量为 Q_0，有 $Q_0=CE$ ⑤

开关 S 接 2 后，MN 开始向右加速运动，切割磁感线，产生“反电动势”，当速度达到最大值 $v_{\max}$ 时，此时反电动势与电容器两端电压相等.

设 MN 上的反电动势为 E'，如图乙所示，有 $E'=Blv_{\max}$ ⑥



乙

依题意有 $E'=U=\dfrac{Q}{C}$ ⑦

设在此过程中 MN 的平均电流为 I，MN 上受到的平均安培力为 F，有

$F=IlB$ ⑧

由动量定理，有 $F\Delta t=mv_{\max}$ ⑨

又 $I\Delta t=Q_0-Q$ ⑩

联立⑤⑥⑦⑧⑨⑩式得 $Q=\dfrac{B^2l^2C^2E}{m+B^2l^2C}$. ⑪

引申：试求 MN 在轨道上运动的过程回路中产生的焦耳热.

解析：根据能量守恒定律，电容器的电场能转化为炮弹的动能和回路中产生的热能. 现在要求解回路中产生的焦耳热，要求出电容器的电场能和炮弹的动能.

炮弹达到最大速度时的动能 $E_{km}=\dfrac{1}{2}mv_m^2$

电容器的电场能 $W=\dfrac{1}{2}CU^2$

所以，电容器电场能的转化 $\Delta W=\dfrac{1}{2}CE^2-\dfrac{1}{2}CU^2$

●解析

根据能的转化与守恒,可得

$$\frac{1}{2}CE^2-\frac{1}{2}CU^2=Q+\frac{1}{2}mv_m^2$$

解得 $Q=\dfrac{mCE^2}{2(m+B^2l^2C)}$.

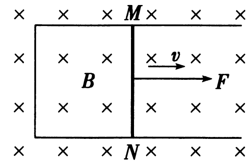
[**感悟方法**]

通过本题的求解,让我们对安培力做功的认识更全面:

安培力做负功,机械能转化为电能,电能再进一步转化为其他形式的能;如,上一讲例1;

安培力做正功,电能转化为机械能以及其他形式能,比如回路中的热能.而转化的电能来自于电源内部能量,比如本题中电容器的电场能.

【例2】(2014·高考北京卷)导体切割磁感线的运动可以从宏观和微观两个角度来认识.如图所示,固定于水平面的U形导线框处于竖直向下的匀强磁场中,金属直导线 MN 在与其垂直的水平恒力 F 作用下,在导线框上以速度 v 做匀速运动,速度 v 与恒力 F 方向相同;导线 MN 始终与导线框形成闭合回路.已知导线 MN 电阻为 R,其长度 L 恰好等于平行轨道间距,磁场的磁感应强度为 B.忽略摩擦阻力和导线框的电阻.



(1)通过公式推导验证:在 Δt 时间内,F 对导线 MN 所做的功 W 等于电路获得的电能 $W_{电}$,也等于导线 MN 中产生的焦耳热 Q;

(2)若导线 MN 的质量 $m=8.0$ g,长度 $L=0.10$ m,感应电流 $I=1.0$ A,假设一个原子贡献1个自由电子,计算导线 MN 中电子沿导线长度方向定向移动的平均速率 v_e(下表中列出一些你可能会用到的数据);

阿伏加德罗常数 N_A	6.0×10^{23} mol^{-1}
元电荷 e	1.6×10^{-19} C
导线 MN 的摩尔质量 μ	6.0×10^{-2} kg/mol

(3)经典物理学认为,金属的电阻源于定向运动的自由电子和金属离子(即金属原子失去电子后的剩余部分)的碰撞.展开你想象的翅膀,给出一个合理的自由电子的运动模型;在此基础上,求出导线 MN 中金属离子对一个自由电子沿导线长度方向的平均作用力 $\overline{f}$ 的表达式.

●解析

(1)导线产生的感应电动势

$E=BLv$

导线匀速运动,受力平衡

$F=F_{安}=BIL$

在 Δt 时间内,外力 F 对导线做功

$W=Fv\Delta t=F_{安}\ v\Delta t=BILv\Delta t$

电路获得的电能

$W_{电}=qE=IE\Delta t=BILv\Delta t$

可见,F 对导线 MN 所做的功等于电路获得的电能 $W_{电}$;

导线 MN 中产生的焦耳热

$Q=I^2R\Delta t=I\Delta t\cdot IR=qE=W_{电}$

可见,电路获得的电能 $W_{电}$ 等于导线 MN 中产生的焦耳热 Q.

(2)导线 MN 中具有的原子数为 $N=\frac{m}{\mu}N_A$

因为一个金属原子贡献一个电子,所以导线 MN 中的自由电子数也是 N.

导线 MN 单位体积内的自由电子数 $n=\frac{N}{SL}$

其中,S 为导线 MN 的横截面积.

因为电流 $I=nv_eSe$

所以 $v_e=\frac{I}{nSe}=\frac{IL}{Ne}=\frac{IL\mu}{mN_Ae}$

解得 $v_e\approx7.8\times10^{-6}$ m/s.

● 解析

(3)下列解法的共同假设:所有自由电子(简称电子,下同)以同一方式运动.

解法 1:动量解法

设电子在第一次碰撞结束至下一次碰撞结束之间的运动都相同,经历的时间为 Δt,电子的动量变化为零.

因为导线 MN 的运动,电子受到沿导线方向的洛伦兹力 $f_{洛}$ 的作用

$f_{洛}=evB$

沿导线方向,电子只受到金属离子的作用力和 $f_{洛}$ 的作用,所以

$I_f-f_{洛}\Delta t=0$

其中 I_f 为金属离子对电子的作用力的冲量,其平均作用力为 $\overline{f}$,则 $I_f=\overline{f}\Delta t$

得 $\overline{f}=f_{洛}=evB$.

解法 2:能量解法

设电子从导线的一端到达另一端经历的时间为 t,在这段时间内,通过导线一端的电子总数

$N=\dfrac{It}{e}$

电阻上产生的焦耳热是由于克服金属离子对电子的平均作用力 $\overline{f}$ 做功产生的.

在时间 t 内,总的焦耳热

$Q=N\overline{f}L$

根据能量守恒定律,有

$Q=W_{电}=EIt=BLvIt$

所以

$\overline{f}=evB$.

解法 3:力的平衡解法

因为电流不变,所以假设电子以速度 v_e 相对导线做匀速直线运动.

因为导线 MN 的运动,电子受到沿导线方向的洛伦兹力 $f_{洛}$ 的作用

●解析

$f_{洛}=evB$

沿导线方向，电子只受到金属离子的平均作用力$\overline{f}$和$f_{洛}$作用，二力平衡，即

$\overline{f}=f_{洛}=evB$.

【例3】(2017·高考北京卷)发电机和电动机具有装置上的类似性，源于它们机理上的类似性. 直流发电机和直流电动机的工作原理可以简化为如图1、图2所示的情景.

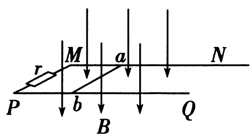


图1

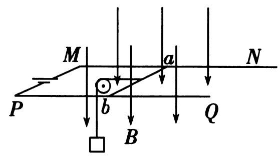


图2

在竖直向下的磁感应强度为B的匀强磁场中，两根光滑平行金属轨道MN、PQ固定在水平面内，相距为L，电阻不计. 电阻为R的金属导体棒ab垂直于MN、PQ放在轨道上，与轨道接触良好，以速度v(v平行于MN)向右做匀速运动.

图1轨道端点MP间接有阻值为r的电阻，导体棒ab受到水平向右的外力作用. 图2轨道端点MP间接有直流电源，导体棒ab通过滑轮匀速提升重物，电路中的电流为I.

(1)求在Δt时间内，图1"发电机"产生的电能和图2"电动机"输出的机械能.

(2)从微观角度看，导体棒ab中的自由电荷所受洛伦兹力在上述能量转化中起着重要作用. 为了方便，可认为导体棒中的自由电荷为正电荷.

a. 请在图3(图1的导体棒ab)、图4(图2的导体棒ab)中，分别画出自由电荷所受洛伦兹力的示意图.

b. 我们知道，洛伦兹力对运动电荷不做功. 那么，导体棒ab中的自由电荷所受洛伦兹力是如何在能量转化过程中起到作用的呢？请以图2"电动机"为例，通过计算分析说明.

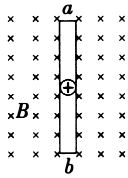


图3

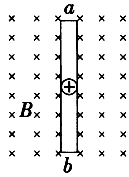
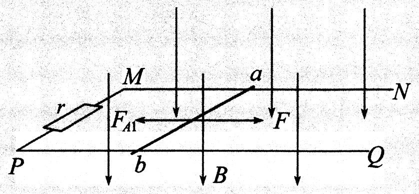


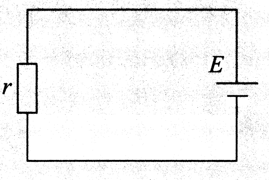
图4

●解析

(1) Ⅰ. 求解题图 1"发电机"产生的电能



甲



乙

解法 1:运用功能关系求解

如图甲所示,导体棒水平方向受到安培力 F_{A1} 和外力 F 作用,考虑到导体棒做匀速运动,可得 $F=F_{A1}$,考虑到功是能量转化的量度,可见导体棒匀速运动的过程中,外力克服安培力做功,将其他形式的能转化为电能. 因此,"发电机"产生的电能等于外力做的功,也等于克服安培力做的功.

作出等效电路图如图乙所示,

电路中的电流 $I_1=\dfrac{BLv}{R+r}$

棒 ab 受到的安培力 $F_{A1}=BI_1L$

在 Δt 时间内,"发电机"产生的电能等于棒 ab 克服安培力做的功

$E_{电}=F_{A1}v\Delta t=\dfrac{B^2L^2v^2\Delta t}{R+r}$

或者:$E_{电}=Fv\Delta t=F_{A1}v\Delta t=\dfrac{B^2L^2v^2\Delta t}{R+r}$.

解法 2:运用电流做功求解

产生的电能等于电流做的功 $E_{电}=W_I=EI\Delta t$

电路中的电流 $I_1=\dfrac{BLv}{R+r}$

可得 $E_{电}=\dfrac{B^2L^2v^2\Delta t}{R+r}$.

●解析

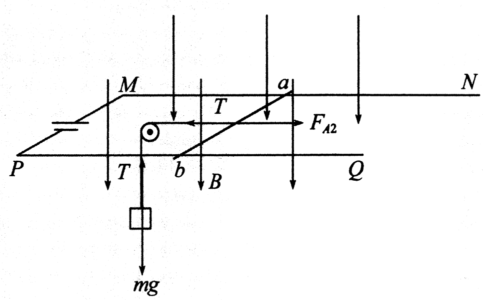
解法 3:运用能量守恒求解

题图 1 是纯电阻电路,也就是说,电路中产生的电能全部用来产生热量 $E_{电}=Q=I^2(R+r)\Delta t$

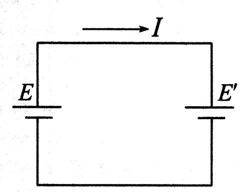
电路中的电流 $I_1=\dfrac{BLv}{R+r}$

可得 $E_{电}=\dfrac{B^2L^2v^2\Delta t}{R+r}$.

Ⅱ.求解题图 2“电动机”输出的机械能



丙



丁

解法 1:运用功能关系求解

如图丙所示,“电动机”输出的机械能等于安培力对 ab 做的功 $E_{输}=F_{A2}v\Delta t$

安培力 $F_{A2}=BIL$

可得 $E_{输}=BILv\Delta t$.

解法 2:运用反电动势求解

“电动机”输出的机械能等于电源克服“反电动势”做的功 $E_{输}=E'I\Delta t$

如图丁所示,反电动势 $E'=BLv$

可得 $E_{输}=BILv\Delta t$.

解法 3:运用能量守恒求解

“电动机”输出的机械能等于重物重力势能的增加 $E_{输}=mgh$

重物上升的高度 $h=v\Delta t$

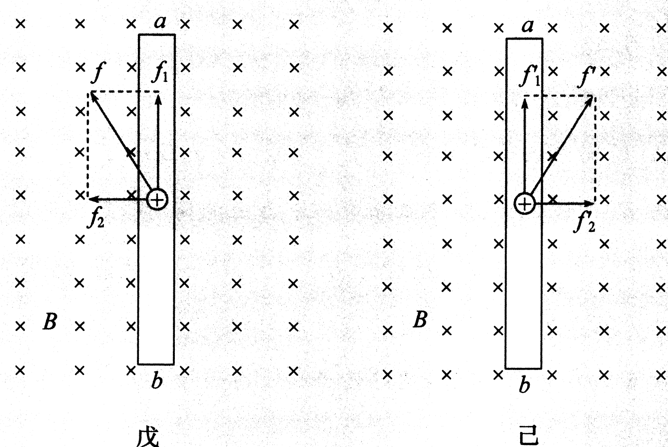
棒 ab 匀速,绳子拉力等于安培力 $T=F_{A2}=BIL$

重物匀速,绳子拉力等于重力 $mg=T$

可得 $E_{输}=BILv\Delta t$.

● 解析

(2)a. 图戊中，棒 ab 向右运动，由左手定则可知其中的正电荷受到 $b\to a$ 方向的洛伦兹力，在该洛伦兹力作用下，正电荷沿导体棒运动形成感应电流，有沿 $b\to a$ 方向的分速度，受到向左的洛伦兹力作用；图己中，在电源形成的电场作用下，棒 ab 中的正电荷沿 $a\to b$ 方向运动，受到向右的洛伦兹力作用，该洛伦兹力使导体棒向右运动，正电荷具有向右的分速度，又受到沿 $b\to a$ 方向的洛伦兹力作用.



b. 设自由电荷的电荷量为 q，沿导体棒定向移动的速率为 u.

如图己所示，沿棒方向的洛伦兹力 $f'_1=qvB$，

做负功 $W_1=-f'_1\cdot u\Delta t=-qvBu\Delta t$

垂直棒方向的洛伦兹力 $f'_2=quB$，

做正功 $W_2=f'_2\cdot v\Delta t=quBv\Delta t$

所以 $W_1=-W_2$，即导体棒中一个自由电荷所受的洛伦兹力做功为零.

f'_1 做负功，阻碍自由电荷的定向移动，宏观上表现为“反电动势”，消耗电源的电能；f'_2 做正功，宏观上表现为安培力做正功，使机械能增加. 大量自由电荷所受洛伦兹力做功的宏观表现是将电能转化为等量的机械能，在此过程中洛伦兹力通过两个分力做功起到“传递”能量的作用.

●解析

引申:请以题图 1 中的“发电机”为例,说明洛伦兹力对运动电荷不做功,并通过计算分析说明导体棒 ab 中的自由电荷所受洛伦兹力是如何在能量转化过程中起到作用的?

解析:如图戌所示,沿导体棒方向的洛伦兹力 $f_1=qvB$,其中 v 是导体棒的速度,

在 Δt 时间内做正功 $W_1=f_1\cdot u\Delta t=qvBu\Delta t$,其中 u 是自由电荷沿导体棒定向移动的速率.

垂直导体棒方向的洛伦兹力 $f_2=quB$,

在 Δt 时间内做负功 $W_2=-f_2\cdot v\Delta t=-quBv\Delta t$,

可得 $W_1+W_2=0$,即导体棒中一个自由电荷所受的洛伦兹力做功为零.

如题图 1 中“发电机”,通过外力 F 做功输入机械能;通过垂直杆方向的洛伦兹力分力做负功能;同时,通过沿杆方向的洛伦兹力分力(非静电力)做正功,将机械能输出为电能.另外,通过金属离子对电子的阻力做负功,又将电能转化为焦耳热.

[**感悟方法**]

例 2、例 3 全面系统地对“发电机”“电动机”两类问题进行本质探究与比较.探究结果表明:

1.**洛伦兹力的关键作用**

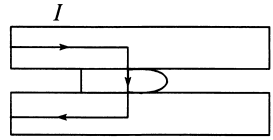
不论是在“发电机”还是“电动机”模型中,洛伦兹力都起到关键作用.通过洛伦兹力的分力做功,实现了机械能与电能之间的相互转化,而从总体来看,洛伦兹力却是“劳而无功”.

2.**“发电机”与“电动机”本质不同**

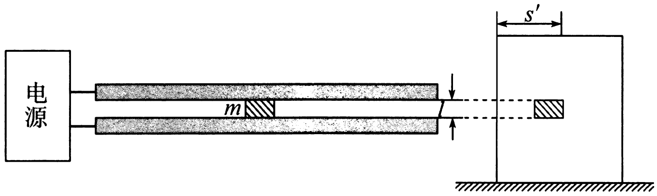
“发电机”与“电动机”能量的转化方向不同,“发电机”是将其他能转化为电能,而“电动机”是将电能转化为其他能,洛伦兹力的两个分力做功起到了能量的转化作用.

章节练习

1. (2007·高考海南卷)据报道,最近已研制出一种可以投入使用的电磁轨道炮,其原理如图所示.炮弹(可视为长方形导体)置于两固定的平行导轨之间,并与轨道壁密接.开始时炮弹在导轨的一端,通以电流后炮弹会被磁力加速,最后从位于导轨另一端的出口高速射出.设两导轨之间的距离 $W=0.10\ \text{m}$,导轨长 $L=5.0\ \text{m}$,炮弹质量 $m=0.30\ \text{kg}$.导轨上的电流 I 的方向如图中箭头所示.可认为,炮弹在轨道内运动时,它所在处磁场的磁感应强度始终为 $B=2.0\ \text{T}$,方向垂直于纸面向里.若炮弹出口速度为 $v=2.0\times10^3\ \text{m/s}$,求通过导轨的电流 I.忽略摩擦力与重力的影响.



2. (2005·高考北京卷)如图是导轨式电磁炮实验装置示意图.两根平行长直金属导轨沿水平方向固定,其间安放金属滑块(即实验用弹丸).滑块可沿导轨无摩擦滑行,且始终与导轨保持良好接触.电源提供的强大电流从一根导轨流入,经过滑块,再从另一导轨流回电源.滑块被导轨中的电流形成的磁场推动而发射.在发射过程中,该磁场在滑块所在位置始终可以简化为匀强磁场,方向垂直于纸面,其强度与电流的关系为 $B=kI$,比例常量 $k=2.5\times10^{-6}$ T/A.已知两导轨内侧间距 $l=1.5$ cm,滑块的质量 $m=30$ g,滑块沿导轨滑行 5 m 后获得的发射速度 $v=3.0$ km/s(此过程视为匀加速运动).



(1)求发射过程中电源提供的电流强度;

(2)若电源输出的能量有 4%转换为滑块的动能,则发射过程中电源的输出功率和输出电压各是多大?

(3)若此滑块射出后随即以速度 v 沿水平方向击中放在水平面上的砂箱,它嵌入砂箱的深度为 s'.设砂箱质量为 M,滑块质量为 m,不计砂箱与水平面之间的摩擦.求滑块对砂箱平均冲击力的表达式.

3. (2006·高考北京卷)磁流体推进船的动力来源于电流与磁场间的相互作用.图 1 是在平静海面上某实验船的示意图,磁流体推进器由磁体、电极和矩形通道(简称通道)组成.如图 2 所示,通道尺寸 $a=2.0\ \mathrm{m}$、$b=0.15\ \mathrm{m}$、$c=0.10\ \mathrm{m}$.工作时,在通道内沿 z 轴正方向加 $B=8.0\ \mathrm{T}$ 的匀强磁场;沿 x 轴负方向加匀强电场,使两金属板间的电压 $U=99.6\ \mathrm{V}$;海水沿 y 轴方向流过通道.已知海水的电阻率 $\rho=0.20\ \Omega\cdot\mathrm{m}$.

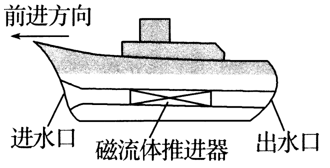


图1

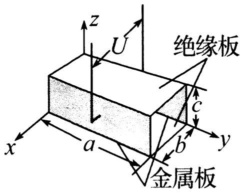


图2

(1)船静止时,求电源接通瞬间推进器对海水推力的大小和方向;

(2)船以 $v_s=5.0\ \mathrm{m/s}$ 的速度匀速前进,若以船为参照物,海水以 5.0 m/s 的速率涌入进水口,由于通道的截面积小于进水口的截面积,在通道内海水速率增加到 $v_d=8.0\ \mathrm{m/s}$.求此时两金属板间的感应电动势 $U_{感}$;

(3)船行驶时,通道中海水两侧的电压按 $U'=U-U_{感}$ 计算,海水受到电磁力的 80% 可以转化为对船的推力.当船以 $v_s=5.0\ \mathrm{m/s}$ 的速度匀速前进时,求海水推力的功率.

4. (2015 · 高考浙江卷)如图 1 所示,质量 $m=3.0\times10^{-3}$ kg 的“┌─┐”形金属细框竖直放置在两水银槽中,“┌─┐”形框的水平细杆 CD 长 $l=0.20$ m,处于磁感应强度大小 $B_1=1.0$ T、方向水平向右的匀强磁场中,有一匝数 $n=300$ 匝、面积 $S=0.01$ m^2 的线圈通过开关 K 与两水银槽相连.线圈处于与线圈平面垂直的、沿竖直方向的匀强磁场中,其磁感应强度 B_2 的大小随时间 t 变化的关系如图 2 所示.

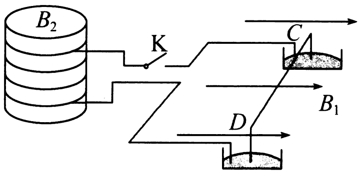


图 1

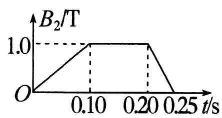


图 2

(1)求 0~0.10 s 线圈中的感应电动势大小;

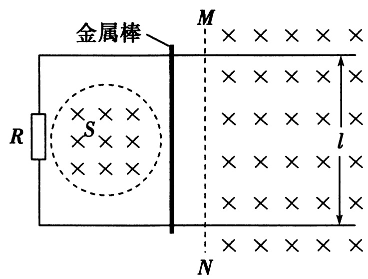
(2)$t=0.22$ s 时闭合开关 K,若细杆 CD 所受安培力方向竖直向上,判断 CD 中的电流方向及磁感应强度 B_2 的方向;

(3)$t=0.22$ s 时闭合开关 K,若安培力远大于重力,细框跳起的最大高度 $h=0.20$ m,求通过细杆 CD 的电荷量.

第十五讲　“双电源”电路模型问题

典例剖析

【例 1】(2016・高考全国卷Ⅲ)如图,两条相距 l 的光滑平行金属导轨位于同一水平面(纸面)内,其左端接一阻值为 R 的电阻;一与导轨垂直的金属棒置于两导轨上;在电阻、导轨和金属棒中间有一面积为 S 的区域,区域中存在垂直于纸面向里的均匀磁场,磁感应强度大小 B_1 随时间 t 的变化关系为 $B_1=kt$,式中 k 为常量;在金属棒右侧还有一匀强磁场区域,区域左边界 MN(虚线)与导轨垂直,磁场的磁感应强度大小为 B_0,方向也垂直于纸面向里.某时刻,金属棒在一外加水平恒力的作用下从静止开始向右运动,在 t_0 时刻恰好以速度 v_0 越过 MN,此后向右做匀速运动.金属棒与导轨始终相互垂直并接触良好,它们的电阻均忽略不计.求:



(1)在 $t=0$ 到 $t=t_0$ 时间间隔内,流过电阻的电荷量的绝对值;

(2)在时刻 $t(t>t_0)$穿过回路的总磁通量和金属棒所受外加水平恒力的大小.

●解析

(1)在金属棒未越过 MN 之前,t 时刻穿过回路的磁通量为 $\Phi=ktS$　①

设在从 t 时刻到 $t+\Delta t$ 的时间间隔内,回路磁通量的变化量为 $\Delta\Phi$,流过电阻 R 的电荷量为 Δq.由法拉第电磁感应定律有 $E=\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$　②

由欧姆定律有 $i=\dfrac{E}{R}$　③

由电流的定义有 $i=\dfrac{\Delta q}{\Delta t}$　④

●解析

联立①②③④式得$|\Delta q|=\frac{kS}{R}\Delta t$ ⑤

由⑤式得，在$t=0$到$t=t_0$的时间间隔内，流过电阻R的电荷量q的绝对值为

$|q|=\frac{kt_0 S}{R}$. ⑥

(2)**解法1：整体应用法拉第电磁感应定律求解**

当$t>t_0$时，金属棒已越过MN. 由于金属棒在MN右侧做匀速运动，有

$f=F$ ⑦

式中，f是外加水平恒力，F是匀强磁场施加的安培力. 设此时回路中的电流为I，F的大小为$F=B_0 Il$ ⑧

此时金属棒与MN之间的距离为$s=v_0(t-t_0)$ ⑨

匀强磁场穿过回路的磁通量为$\Phi'=B_0 ls$ ⑩

回路的总磁通量为$\Phi_t=\Phi+\Phi'$ ⑪

式中，Φ仍如①式所示. 由①⑨⑩⑪式得，在时刻$t(t>t_0)$穿过回路的总磁通量为

$\Phi_t=B_0 lv_0(t-t_0)+kSt$ ⑫

在t到$t+\Delta t$的时间间隔内，总磁通量的改变量为

$\Delta\Phi_t=(B_0 lv_0+kS)\Delta t$ ⑬

由法拉第电磁感应定律得，回路感应电动势的大小为

$E_t=\frac{\Delta\Phi_t}{\Delta t}$ ⑭

由欧姆定律有$I=\frac{E_t}{R}$ ⑮

联立⑦⑧⑬⑭⑮式得$f=(B_0 lv_0+kS)\frac{B_0 l}{R}$.

●解析

解法 2：应用“感生”与“动生”电动势的叠加求解

回路中因磁场强度变化产生的电动势 $E_1=\frac{\Delta B_1}{\Delta t}S=kS$，根据楞次定律可得感应电动势的方向为逆时针.

金属棒切割磁感线产生的电动势 $E_0=B_0lv_0$，根据右手定则，对回路来说这个电动势的方向也为逆时针.

因此，回路中产生的总电动势为

$E=E_1+E_2=kS+B_0lv_0$

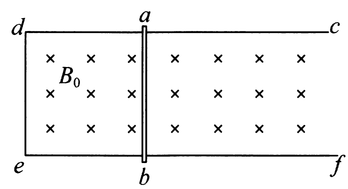
结合解法 1 中的⑦⑧⑮可得

$f=(B_0lv_0+kS)\frac{B_0l}{R}$.

[拓展]

要注意的是，解法 1 具有普遍适用性，解法 2 却有一定的局限性，请看下面的高考题.

【例 2】(2000·高考上海卷)如图所示，固定于水平桌面上的金属框架 $cdef$，处在竖直向下的匀强磁场中，金属棒 ab 搁在框架上，可无摩擦滑动，此时 $adeb$ 构成一个边长为 l 的正方形，棒的电阻为 r，其余部分电阻不计，开始时磁感应强度为 B_0.



(1)若从 $t=0$ 时刻起，磁感应强度均匀增加，每秒增量为 k，同时保持棒静止，求棒中的感应电流，在图上标出感应电流的方向.

(2)在上述(1)情况中，始终保持棒静止，当 $t=t_1$ 秒末时需加的垂直于棒的水平拉力为多大？

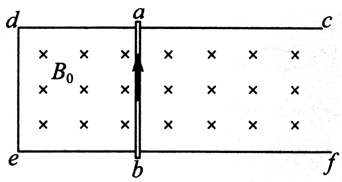
(3)若从 $t=0$ 时刻起，磁感应强度逐渐减小，当棒以恒定速度 v 向右做匀速运动时，可使棒中不产生感应电流，则磁感应强度应怎样随时间变化(写出 B 与 t 的关系式)？

●解析

(1)感应电动势 $E=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=kl^2$

感应电流 $I=\frac{E}{r}=\frac{kl^2}{r}$

方向:逆时针(如图所示).



(2)$t=t_1$ 秒时,$B=B_0+kt_1$

$F=BIl$

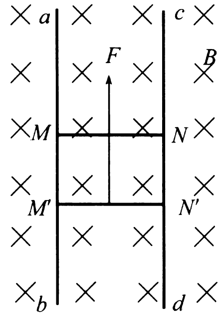
得 $F=(B_0+kt_1)\frac{kl^3}{r}$.

(3)棒中不产生感应电流,即总磁通量不变,有 $Bl(l+vt)=B_0l^2$

得 $B=\frac{B_0l}{l+vt}$.

对于第(3)小题,如果用隔离的方法,求出"磁变"与"切变"电动势,然后相"抵消",那就会误入歧途.

【例 3】(2011·高考海南卷)如图,ab 和 cd 是两条竖直放置的长直光滑金属导轨,MN 和 $M'N'$是两根用细线连接的金属杆,其质量分别为 m 和 $2m$. 竖直向上的外力 F 作用在杆 MN 上,使两杆水平静止,并刚好与导轨接触;两杆的总电阻为 R,导轨间距为 l. 整个装置处在磁感应强度为 B 的匀强磁场中,磁场方向与导轨所在平面垂直. 导轨电阻可忽略,重力加速度为 g. 在 $t=0$ 时刻将细线烧断,保持 F 不变,金属杆和导轨始终接触良好. 求:



(1)细线烧断后，任意时刻两杆运动的速度之比；

(2)两杆分别达到的最大速度.

解析

设某时刻 MN 和 $M'N'$ 速度分别为 v_1、v_2.

(1)MN 和 $M'N'$ 动量守恒：$mv_1-2mv_2=0$

求出 $\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{2}{1}$. ①

(2)当 MN 和 $M'N'$ 的加速度为零时，速度最大

对 $M'N'$ 受力平衡：$BIl=2mg$ ②

$I=\dfrac{E}{R}$ ③

$E=Blv_1+Blv_2$ ④

由①②③④得：

$v_1=\dfrac{4mgR}{3B^2l^2}$、$v_2=\dfrac{2mgR}{3B^2l^2}$.

［**感悟方法**］

通过三个例题的求解，让我们认识到，产生感应电动势有两种不同的模型：磁变模型与切变模型. 因此在“双电源”问题中可以出现多种组合，但不论何种组合，其解决的方法只有两种：

1. **整体法**

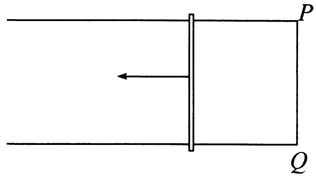
先写出穿过回路的磁通量表达式，然后再根据法拉第电磁感应定律求出回路的总电动势.

2. **隔离法**

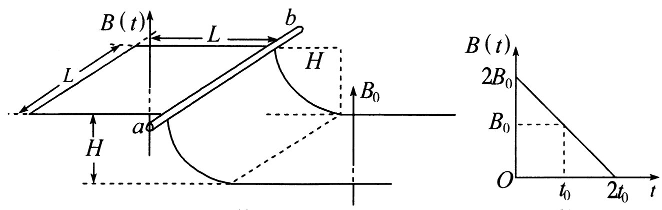
先根据法拉第电磁感应定律求出每一个电源的电动势的大小，判断出每一个电源电动势的方向，然后再求出回路的总的感应电动势.

章节练习

1. (2003·高考江苏卷)如图所示,两根平行金属导轨固定在水平桌面上,每根导轨每米的电阻为 $r_0=0.10\ \Omega$,导轨的端点 P、Q 用电阻可忽略的导线相连,两导轨间的距离 $l=0.2$ m. 有随时间变化的匀强磁场垂直于桌面,已知磁感应强度 B 与时间 t 的关系为 $B=kt$,比例系数 $k=0.020$ T/s. 一电阻不计的金属杆可在导轨上无摩擦地滑动,在滑动过程中保持与导轨垂直. 在 $t=0$ 时刻,金属杆紧靠在 P、Q 端,在外力作用下,杆以恒定的加速度从静止开始向导轨的另一端滑动,求在 $t=6.0$ s 时金属杆所受的安培力.



2. (2007 · 高考广东卷)如图(a)所示，一端封闭的两条平行光滑导轨相距 L，距左端 L 处的中间一段被弯成半径为 H 的 $\frac{1}{4}$ 圆弧，导轨左右两段处于高度相差 H 的水平面上. 圆弧导轨所在区域无磁场，右段区域存在磁场 B_0，左段区域存在均匀分布但随时间线性变化的磁场 $B(t)$，如图(b)所示，两磁场方向均竖直向上. 在圆弧顶端，放置一质量为 m 的金属棒 ab，与导轨左段形成闭合回路，从金属棒下滑开始计时，经过时间 t_0 滑到圆弧顶端. 设金属棒在回路中的电阻为 R，导轨电阻不计，重力加速度为 g.



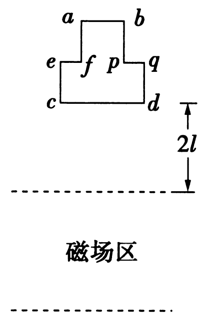
(a) (b)

(1)问金属棒在圆弧内滑动时，回路中感应电流的大小和方向是否发生改变？为什么？

(2)求 0 到时间 t_0 内，回路中感应电流产生的焦耳热量.

(3)探讨在金属棒滑到圆弧底端进入匀强磁场 B_0 的一瞬间，回路中感应电流的大小和方向.

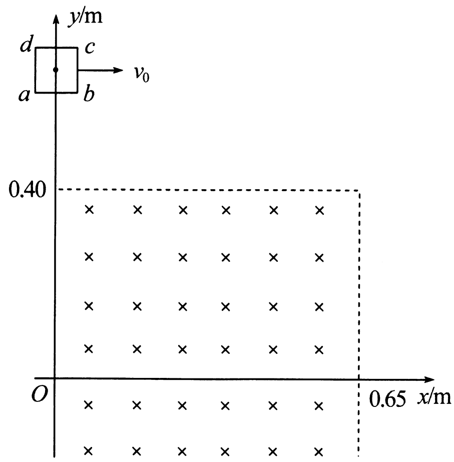
3.(2015·高考天津卷)如图所示,“凸”字形硬质金属线框质量为 m,相邻各边互相垂直,且处于同一竖直平面内,ab 边长为 l,cd 边长为 $2l$,ab 与 cd 平行,间距为 $2l$. 匀强磁场区域的上下边界均水平,磁场方向垂直于线框所在平面. 开始时,cd 边到磁场上边界的距离为 $2l$,线框由静止释放,从 cd 边进入磁场直到 ef、pq 边进入磁场前,线框做匀速运动,在 ef、pq 边离开磁场后,ab 边离开磁场之前,线框又做匀速运动. 线框完全穿过磁场过程中产生的热量为 Q. 线框在下落过程中始终处于原竖直平面内,且 ab、cd 边保持水平,重力加速度为 g. 求



(1)线框 ab 边将离开磁场时做匀速运动的速度大小是 cd 边刚进入磁场时的几倍;

(2)磁场上下边界间的距离 H.

4. (2018·浙江4月)如图所示，在竖直平面内建立 xOy 坐标系，在 $0 \leqslant x \leqslant 0.65\ \text{m}$、$y \leqslant 0.40\ \text{m}$ 范围内存在一具有理想边界，方向垂直纸面向里的匀强磁场区域. 一边长 $l = 0.10\ \text{m}$、质量 $m = 0.02\ \text{kg}$、电阻 $R = 0.40\ \Omega$ 的匀质正方形刚性导线框 $abcd$ 处于图示位置，其中心的坐标为$(0, 0.65\ \text{m})$. 现将线框以初速度 $v_0 = 2.0\ \text{m/s}$ 水平向右抛出，线框在进入磁场过程中速度保持不变，然后在磁场中运动，最后从磁场右边界离开磁场区域，完成运动全过程. 线框在全过程中始终处于 xOy 平面内，其 ab 边与 x 轴保持平行，空气阻力不计. 求：



(1)磁感应强度 B 的大小；

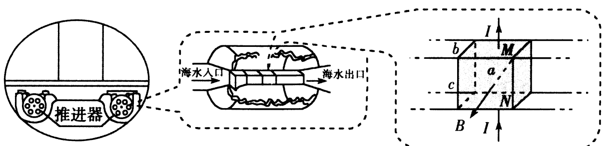
(2)线框在全过程中产生的焦耳热 Q;

(3)在全过程中,cb 两端的电势差 U_{cb} 与线框中心位置的 x 坐标的函数关系.

第十六讲 电磁感应现象对接高新科技

典例剖析

【例 1】(2013·高考浙江卷)为了降低潜艇噪音,提高其前进速度,可用电磁推进器替代螺旋桨。潜艇下方有左、右两组推进器,每组由 6 个相同的、用绝缘材料制成的直线通道推进器构成,其原理示意图如下.在直线通道内充满电阻率 $\rho=0.2\ \Omega\cdot m$ 的海水,通道中 $a\times b\times c=0.3\ m\times 0.4\ m\times 0.3\ m$ 的空间内,存在由超导线圈产生的匀强磁场,其磁感应强度 $B=6.4\ T$、方向垂直通道侧面向外.磁场区域上、下方各有 $a\times b=0.3\ m\times 0.4\ m$ 的金属板 M、N,当其与推进器专用直流电源相连后,在两板之间的海水中产生了从 N 到 M,大小恒为 $I=1.0\times 10^3\ A$ 的电流,设该电流只存在于磁场区域.不计电源内阻及导线电阻,海水密度 $\rho_m=1.0\times 10^3\ kg/m^3$.



(1)求一个直线通道推进器内磁场对通电海水的作用力大小,并判断其方向.

(2)在不改变潜艇结构的前提下,简述潜艇如何转弯?如何“倒车”?

(3)当潜艇以恒定速度 $v_0=30\ m/s$ 前进时,海水在出口处相对于推进器的速度 $v=34\ m/s$,思考专用直流电源所提供的电功率如何分配,求出相应功率的大小.

解析

(1)将通电海水看成导线,所受磁场力 $F=BIL$,代入数据得:$F=BIc=1.0\times 10^3\times 6.4\times 0.3\ N=1.92\times 10^3\ N$,

用左手定则可判断力的方向向右.

(2)要实施转弯,只需要两侧潜艇受到海水的推力不平衡即可,因此只需要开启或关闭不同个数的左、右两侧的直线通道推进器,实施转弯.

要实施“倒车”,只要改变安培力方向,根据左手定则,只要改变电流方向,或改变磁场方向即可.

解析

(3)**解法 1:运用能量守恒求解**

电源提供的能量转化为三个方面:第一个是提供给潜艇,第二个是海水的热能,第三个是海水的动能.

电源提供的电功率中的第一部分为牵引功率

$P_1=F_{牵}v_0=6.9\times10^5\ \text{W}$

电源提供的电功率中的第二部分为单位时间内海水的焦耳热功率

推进器内海水的电阻

$R=\rho\frac{L}{S}=\frac{\rho c}{ab}=0.5\ \Omega$

$P_2=12I^2R=6\times10^6\ \text{W}$

电源提供的电功率中的第三部分为单位时间内海水动能的增加量

海水相对地面的速度 $v'=v-v_0=4\ \text{m/s}$

单位时间内通过推进器的水的质量为

$m=\rho_m bcv'=480\ \text{kg}$

单位时间内其动能增加为

$P_3=12\times\frac{1}{2}mv'^2=4.6\times10^4\ \text{W}$.

解法 2:运用功能关系求解

同解法 1 可得电源提供的电功率中转化为海水的焦耳热功率

$P_2=12I^2R=6\times10^6\ \text{W}$

海水受到的安培力 $F=BIc$

海水相对地面的速度

$v'=v-v_0=4\ \text{m/s}$

安培力对海水做的功

$W_{FA}=Fx_1=12BIc\frac{v'}{2}t$

安培力对海水做功的功率

$P_3=12BIc\frac{v'}{2}=4.6\times10^4\ \text{W}$

●解析

对潜艇的安培力 $F'=-F$

安培力对潜艇做的功

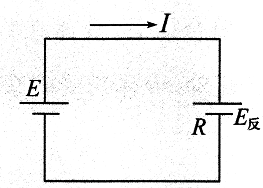
$W_{FA}'=Fx_2=12BIcv_0t$

安培力对潜艇做功的功率

$P_1=12BIcv_0=6.9\times10^5$ W.

解法 3:运用反电动势求解

海水在安培力的作用下做匀加速运动,同时切割磁感线,产生"反电动势".设直流电源的电动势为 E,海水产生的反电动势为 $E_反$,等效电路如图所示.



根据闭合电路欧姆定律有

$E-E_反=IR$

两边同乘以电流 I 可得 $EI=E_反I+I^2R$,这个式子表明,直流电源提供的能量,其中一部分转化为海水的焦耳热,另一部分转化为与反电动势有关的能量.

同解法 1 可得电源提供的电功率中转化为海水的焦耳热功率

$P_2=12I^2R=6\times10^6$ W

下面我们来求解与反动势有关的功率.海水相对于潜艇的初速度为 v_0,海水相对于潜艇的末速度为 v,海水做匀加速运动,所以海水切割磁感线产生的反动势的平均值为

$$E_反=12Bc\bar{v}=12Bc\frac{v_0+v}{2}$$

因此,反动势对应的功率为

$$P_反=EI=12BIc\frac{v_0+v}{2}=7.37\times10^5\ \text{W}$$

考虑到海水相对地面的速度 $v'=v-v_0$,

可得 $v=v_0+v'$

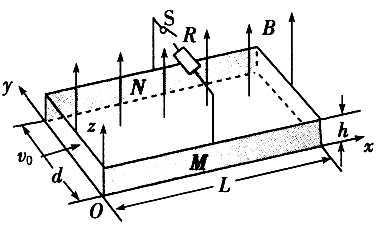
●解析

所以 $P_{反}=EI=12BIc\dfrac{v_0+v}{2}=12BIc(v_0+\dfrac{v'}{2})=12BIcv_0+6BIcv'=P_1+P_3$

即 $P_1=12BIcv_0=6.9\times10^5$ W，此为海水动能增加的功率；

$P_3=6BIcv'=4.6\times10^4$ W，此为对潜艇做功的功率.

【例 2】(2014·高考福建卷)如图，某一新型发电装置的发电管是横截面为矩形的水平管道，管道的长为 L、宽为 d、高为 h，上下两面是绝缘板，前后两侧面 M、N 是电阻可忽略的导体板，两导体板与开关 S 和定值电阻 R 相连. 整个管道置于磁感应强度大小为 B，方向沿 z 轴正方向的匀强磁场中. 管道内始终充满电阻率为 ρ 的导电液体(有大量的正、负离子)，且开关闭合前后，液体在管道进、出口两端压强差的作用下，均以恒定速率 v_0 沿 x 轴正向流动，液体所受的摩擦阻力不变.



(1)求开关闭合前，M、N 两板间的电势差大小 U_0；

(2)求开关闭合前后，管道两端压强差的变化 Δp；

(3)调整矩形管道的宽和高，但保持其他量和矩形管道的横截面积 $S=dh$ 不变，求电阻 R 可获得的最大功率 P_m 及相应的宽高比 $\dfrac{d}{h}$ 的值.

●解析

(1)解法 1：运用受力平衡求解

电源的电动势在数值上等于电源未接入电路时电源两端的电势差. 即当开关闭合前，M、N 两板间的电势差大小等于“磁流体发电机”的电动势.

导电液体刚进入磁场时，因两板不带电，电场力 $F_{电}=0$，正、负离子受洛伦兹力向 N、M 偏转，使得两板电量增加，$F_{电}$ 逐渐增加，但只要 $f_{洛}>F_{电}$，两板上正、负离子会继续积累. 当 $f_{洛}=F_{电}$ 时正、负离子受力平衡不再偏转，这时两板上电荷量不再增加，两板间电势差保持不变.

●解析

设带电离子所带的电荷量为 q，当其所受的洛伦兹力与电场力平衡时，U_0 保持恒定，有

$$Bqv_0=q\frac{U_0}{d}$$

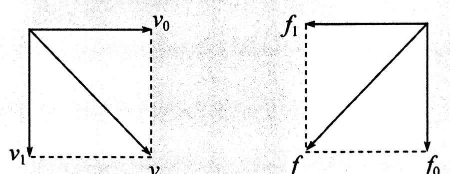
得：$U_0=Bdv_0$.

解法 2：利用非静电力做功求解

考虑开关闭合后，为维持电流持续运转，电源内部必须有在正负极板间搬运载流子的非静电力. 在磁流体发电机中，以正离子为例，粒子受洛伦兹力而向 M 板偏转. 如图所示，其速度可分解为水平分速度 v_0（等离子体冲进场的速度，在后方粒子的撞击下，这个分速度大小不变）和竖直分速度 v_1. 粒子所受洛伦兹力也可分解为指向 M 板的分力 $f_0=qv_0B$（由水平分速度 v_0 决定）和水平向左的分力 $f_1=qv_1B$（由竖直分速度 v_2 决定），f_1 的宏观表现就是安培力，而 f_0 就是电源中的非静电力.

由电动势的定义可知，电动势在数值上等于在电源的正负极间每搬运 1 C 的电量非静电力做的功.

$$E=\frac{W_{非}}{q},$$



磁流体发电机中，非静电力 $f_0=qv_0B$，

发电机 MN 两极板的间距为 d，则

$$E=\frac{W_{f_0}}{q}=\frac{qv_0Bd}{q}=Bdv_0.$$

考虑到开关闭合前，M、N 两板间的电势差大小等于“磁流体发电机”的电动势. 所以 $U_0=Bdv_0$.

●解析

解法 3：利用等效方法求解

导电液体进入磁场后，“切割”磁感线的过程可以等效为一根长为 d 的导体棒在切割磁感线，可根据电磁感应定律得 $E=Bdv_0$

考虑到开关闭合前，M、N 两板间的电势差大小等于“磁流体发电机”的电动势. 所以 $U_0=Bdv_0$.

(2)**解法 1：牛顿运动定律结合欧姆定律求解**

设开关闭合前后，管道两端压强差分别为 p_1、p_2，液体所受的摩擦阻力均为 f，开关闭合后管道内液体受到的安培力为 $F_{安}$，有：

$p_1hd=f$，$p_2hd=f+F_{安}$，$F_{安}=BId$

根据欧姆定律，有 $I=\dfrac{U_0}{R+r}$

两板间液体的电阻 $r=\rho\dfrac{d}{Lh}$

联立解得：$\Delta p=\dfrac{Ldv_0B^2}{LhR+d\rho}$.

解法 2：根据能量的转化与守恒定律求解

根据欧姆定律，有 $I=\dfrac{E}{R+r}=\dfrac{U_0}{R+r}$

两板间液体的电阻 $r=\rho\dfrac{d}{Lh}$

发电机的总功率 $P=EI=U_0I$

设开关闭合前管道两端压强差为 p_1，根据能的转化与守恒有 $p_1hd\cdot v_0=fv_0$

设开关闭合后管道两端压强差为 p_2，根据能的转化与守恒有 $p_2hd\cdot v_0=P+fv_0$

联立解得

$$\Delta p=p_2-p_1=\frac{Ldv_0B^2}{LhR+d\rho}.$$

●解析

(3)电阻 R 获得的功率为：$P=I^2R$，$P=\left(\dfrac{BLv_0}{\dfrac{LR}{d}+\dfrac{\rho}{h}}\right)^2R$，

当 $\dfrac{d}{h}=\dfrac{LR}{\rho}$ 时

电阻 R 获得的最大功率 $P_m=\dfrac{LSv_0^2B^2}{4\rho}$.

［**感悟方法**］

通过例 1、例 2 的求解，我们要学会解决信息题的一般思路.

(1)**认真审题，提取信息**

信息题叙述冗长，信息混杂，要防止审题时误入歧途. 要坚持“一遍全读，定点重读”的策略. 突出问题的主干，使繁杂的问题简明化. 要仔细阅读提供的材料，理解新信息和新情景，紧扣问题，剔除干扰信息，提取有价值信息.

(2)**激活记忆，迁移模型**

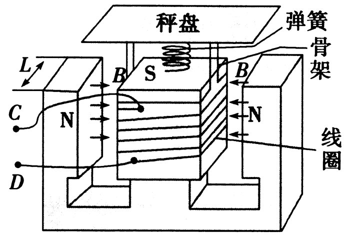
在审题过程中，专注分析问题的核心信息，通过联想、类比、等效等方法来激活大脑记忆中的“模型库”，将问题与模型库中的相应模型做一一对应，比如例 1，从整个问题来看就是电磁感应中的“电动机”模型，从细节上看涉及流体柱体模型，流体的导体棒模型等. 例 2 中从整体来看，是同学们熟悉的磁流体模型，从细节看是电源的断路模型、电源的供电模型、速度选择器模型以及通过等效的方法将流体转化为导体棒的切割模型等.

(3)**搭建桥梁，确定方向**

建立模型后，搭建模型与相应的物理知识之间的桥梁，选用适当的物理规律并灵活应用原有知识，通过推理解决问题.

章节练习

1. (2014·高考重庆卷)某电子天平原理如图所示,E形磁铁的两侧为N极,中心为S极,两极间的磁感应强度大小均为B,磁极宽度均为L,忽略边缘效应,一正方形线圈套于中心磁极,其骨架与秤盘连为一体,线圈两端C、D与外电路连接,当质量为m的重物放在秤盘上时,弹簧被压缩,秤盘和线圈一起向下运动(骨架与磁极不接触),随后外电路对线圈供电,秤盘和线圈恢复到未放重物时的位置并静止,由此时对应的供电电流I可确定重物的质量.



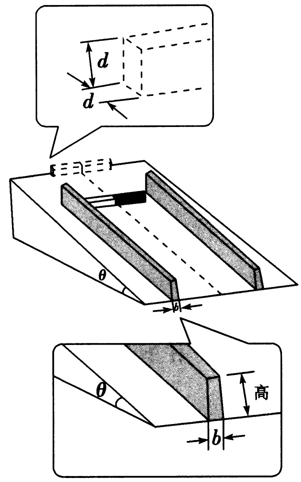
已知线圈匝数为n,线圈电阻为R,重力加速度为g,问:

(1)线圈向下运动过程中,线圈中感应电流是从C端还是从D端流出?

(2)供电电流I是从C端还是从D端流入?求重物质量与电流的关系.

(3)若线圈消耗的最大功率为P,该电子天平能称量的最大质量是多少?

2. (2016 · 高考天津卷)电磁缓速器是应用于车辆上以提高运行安全性的辅助制动装置,其工作原理是利用电磁阻尼作用减缓车辆的速度. 电磁阻尼作用可以借助如下模型讨论:如图所示,将形状相同的两根平行且足够长的铝条固定在光滑斜面上,斜面与水平方向夹角为 θ. 一质量为 m 的条形磁铁滑入两铝条间,恰好匀速穿过,穿过时磁铁两端面与两铝条的间距始终保持恒定,其引起电磁感应的效果与磁铁不动、铝条相对磁铁运动相同. 磁铁端面是边长为 d 的正方形,由于磁铁距离铝条很近,磁铁端面正对两铝条区域的磁场均可视为匀强磁场,磁感应强度为 B,铝条的高度大于 d,电阻率为 ρ. 为研究问题方便,铝条中只考虑与磁铁正对部分的电阻和磁场,其他部分电阻和磁场可忽略不计,假设磁铁进入铝条间以后,减少的机械能完全转化为铝条的内能,重力加速度为 g.



(1)求铝条中与磁铁正对部分的电流 I;

(2)若两铝条的宽度均为 b,推导磁铁匀速穿过铝条间时速度 v 的表达式;

(3)在其他条件不变的情况下,仅将两铝条更换为宽度 $b'>b$ 的铝条,磁铁仍以速度 v 进入铝条间,试简要分析说明磁铁在铝条间运动时的加速度和速度如何变化.

3. (2010·高考北京卷)利用霍尔效应制作的霍尔元件以及传感器,广泛应用于测量和自动控制等领域.

如图1,将一金属或半导体薄片垂直置于磁场 B 中,在薄片的两个侧面 a、b 间通以电流 I 时,另外两侧 c、f 间产生电势差,这一现象称为霍尔效应.其原因是薄片中的移动电荷受洛伦兹力的作用向一侧偏转和积累,于是 c、f 间建立起电场 E_H,同时产生霍尔电势差 U_H.当电荷所受的电场力与洛伦兹力处处相等时,E_H 和 U_H 达到稳定值,U_H 的大小与 I 和 B 以及霍尔元件厚度 d 之间满足关系式 $U_H=R_H\frac{IB}{d}$,其中比例系数 R_H 称为霍尔系数,仅与材料性质有关.

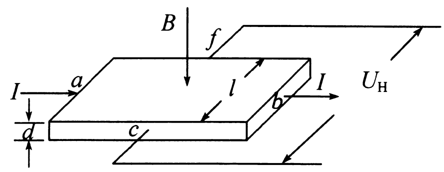


图 1

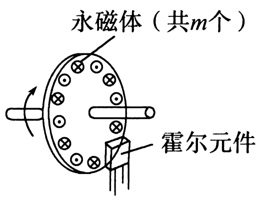


图2

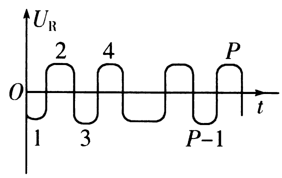


图3

(1)设半导体薄片的宽度(c、f 间距)为 l,请写出 U_H 和 E_H 的关系式;若半导体材料是电子导电的,请判断图1中 c、f 哪端的电势高;

(2)已知半导体薄片内单位体积中导电的电子数为 n，电子的电荷量为 e，请导出霍尔系数 R_H 的表达式.(通过横截面积 S 的电流 $I=nevS$，其中 v 是导电电子定向移动的平均速率)；

(3)图 2 是霍尔测速仪的示意图，将非磁性圆盘固定在转轴上，圆盘的周边等距离地嵌装着 m 个永磁体，相邻永磁体的极性相反. 霍尔元件置于被测圆盘的边缘附近. 当圆盘匀速转动时，霍尔元件输出的电压脉冲信号图象如图 3 所示.

a. 若在时间 t 内，霍尔元件输出的脉冲数目为 P，请导出圆盘转速 N 的表达式.

b. 利用霍尔测速仪可以测量汽车行驶的里程. 除此之外，请你展开“智慧的翅膀”，提出另一个实例或设想.

4. (2013·高考天津卷)超导现象是20世纪人类重大发现之一,日前我国已研制出世界传输电流最大的高温超导电缆并成功示范运行.

(1)超导体在温度特别低时电阻可以降到几乎为零,这种性质可以通过实验研究.将一个闭合超导金属圆环水平放置在匀强磁场中,磁感线垂直于圆环平面向上,逐渐降低温度使环发生由正常态到超导态的转变后突然撤去磁场,若此后环中的电流不随时间变化,则表明其电阻为零.请指出自上往下看环中电流方向,并说明理由.

(2)为探究该圆环在超导状态的电阻率上限 ρ,研究人员测得撤去磁场后环中电流为 I,并经一年以上的时间 t 未检测出电流变化.实际上仪器只能检测出大于 ΔI 的电流变化,其中 $\Delta I \ll I$,当电流的变化小于 ΔI 时,仪器检测不出电流的变化,研究人员便认为电流没有变化.设环的横截面积为 S,环中定向移动电子的平均速率为 v,电子质量为 m、电荷量为 e.试用上述给出的各物理量,推导出 ρ 的表达式.

(3)若仍使用上述测量仪器,实验持续时间依旧为 t,为使实验获得的该圆环在超导状态的电阻率上限 ρ 的准确程度更高,请提出你的建议,并简要说明实现方法.

答案与解析

第一章　力学综合篇

第一讲　基本运动之直线运动

［章节练习］

1. **解**：(1)C受力平衡，则 $2F\cos 30°=mg$.

解得 $F=\frac{\sqrt{3}}{3}mg$.

(2)C恰好降到地面时，B受C压力的水平分力最大，为 $F_{x\max}=\frac{\sqrt{3}}{2}mg$

B受地面的摩擦力 $f=\mu mg$

根据题意 $f_{\min}=F_{x\max}$，解得 $\mu_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3)C下降的高度 $h=(\sqrt{3}-1)R$

A的位移 $x=2(\sqrt{3}-1)R$

摩擦力做功的大小 $W_f=fx=2(\sqrt{3}-1)\mu mgR$

根据动能定理得 $W-W_f+mgh=0-0$

解得 $W=(2\mu-1)(\sqrt{3}-1)mgR$.

2. **解**：(1)物块A移动了距离s，则物块B移动的距离为 $s_1=\frac{1}{2}s$　①

物块B受到的摩擦力大小为 $f=4\mu mg$　②

物块B克服摩擦力所做的功为 $W=fs_1=2\mu mgs$.　③

(2)设物块A、B的加速度大小分别为a_A、a_B，绳中的张力为T. 由牛顿第二定律得

$F-\mu mg-T=ma_A$　④

$2T-4\mu mg=4ma_B$　⑤

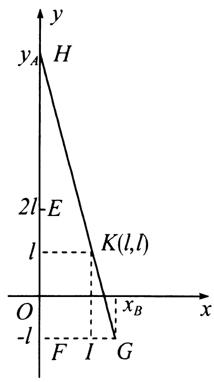
由A和B的位移关系得 $a_A=2a_B$　⑥

联立④⑤⑥式得 $a_A=\frac{F-3\mu mg}{2m}$　⑦

$a_B=\frac{F-3\mu mg}{4m}$.　⑧

3. **解**:从运动学和运动的合成角度入手,作图寻找几何关系是关键.

设 B 车的速度大小为 v. 如图,标记 R 在时刻 t 通过点 $K(l,l)$,此时 A、B 的位置分别为 H、G. 由运动学公式,H 的纵坐标 y_A、G 的横坐标 x_B 分别为



$y_A=2l+\frac{1}{2}at^2$ ①

$x_B=vt$ ②

在开始运动时,R 到 A 和 B 的距离之比为 2∶1,即

$OE:OF=2:1$

由于橡皮筋的伸长是均匀的,在以后任一时刻 R 到 A 和 B 的距离之比都为 2∶1. 因此,在时刻 t 有

$HK:KG=2:1$ ③

由于$\triangle FGH\backsim\triangle IGK$,有

$HG:KG=x_B:(x_B-l)$ ④

$HG:KG=(y_A+l):(2l)$ ⑤

由③④⑤式得

$x_B=\frac{3}{2}l$ ⑥

$y_A=5l$ ⑦

联立①②⑥⑦式得

$v=\frac{1}{4}\sqrt{6al}.$ ⑧

4. **解**:(1)据题意,由 $v_t^2-v_0^2=2ax$,得:$x=\frac{v_t^2-v_0^2}{2a}$ ①

汽车刹车时,阻力产生的加速度为 a

由牛顿第二定律得 $a=\frac{F}{m}$ ②

代入数据得制动距离 $x=30$ m. ③

(2)据题意,汽车不受影响的行驶距离应该是 $x_1=30$ m ④

故黄灯的持续时间为 t,

则 $t=\frac{x_1}{v_0}$ ⑤

代入数据得时间为 $t=2$ s. ⑥

第二讲　基本运动之平抛运动

[章节练习]

1. **解**:设圆半径为 r,质点做平抛运动,则:

$x=v_0t$ ①

$y=\frac{1}{2}r=\frac{1}{2}gt^2$ ②

过 c 点做 $cd\perp ab$ 于 d 点,$\mathrm{Rt}\triangle acd\backsim\mathrm{Rt}\triangle cbd$,可得 $cd^2=ad\cdot db$,即为:

$\left(\frac{r}{2}\right)^2=x(2r-x)$ ③

由①②③得:$r=\frac{4(7\pm4\sqrt{3})}{g}v_0^2$.

2. **解**:(1)装甲车的加速度 $a=\frac{v_0^2}{2s}=\frac{20}{9}$ m/s^2.

(2)第一发子弹飞行时间 $t_1=\frac{L}{v+v_0}=0.5$ s

弹孔离地高度 $h_1=h-\frac{1}{2}gt_1^2=0.55$ m

第二个弹孔离地的高度 $h_2=h-\frac{1}{2}g\left(\frac{L-s}{v}\right)^2=1.0$ m

两弹孔之间的距离 $\Delta h=h_2-h_1=0.45$ m.

(3)第一发子弹打到靶的下沿时,装甲车离靶的距离为

$L_1=(v_0+v)\sqrt{\frac{2h}{g}}=492$ m

第二发子弹打到靶的下沿时,装甲车离靶的距离为

$L_2=v\sqrt{\frac{2h}{g}}+s=570$ m

L 的范围为 492 m$<L\leqslant$570 m.

3. **解**:(1)在 B 点,由牛顿第二定律有 $F_N-mg=m\frac{v_B^2}{R}$

根据牛顿第三定律 $F_N=F'_N=3.6$ N

解得 $v_B=4$ m/s.

(2)A 至 B 过程，由动能定理：$mgR-W_f=\frac{1}{2}mv_B^2$，

解得 $W_f=2.4$ J.

(3)B 至 C 过程，由动能定理可得 $-kmgL_{BC}=\frac{1}{2}mv_C^2-\frac{1}{2}mv_B^2$

B 至 P 的水平距离：$L=\frac{v_B^2-v_C^2}{2kg}+v_C\sqrt{\frac{2h}{g}}=4-\frac{1}{4}v_C^2+\frac{4}{5}v_C$

当 $v_C=1.6$ m/s 时 P 至 B 的水平距离最大，$L_{BC}=3.36$ m.

(4)C 至 P 时间：$t_0=\sqrt{\frac{2h}{g}}=0.8$ s，

$t_1=\frac{1}{2}\times 2t_0=0.8$ s，…，$t_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}t_1$，

$t=2.4$ s.

4. **解**：(1)据平抛规律得：$h_1=\frac{1}{2}gt_1^2$

$x_1=v_1t_1$

解得：$x_1=v_1\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$.

(2)同理得：$h_2=\frac{1}{2}gt_2^2$

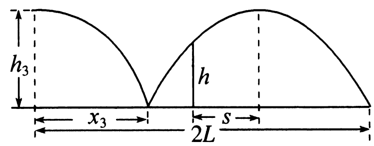
$x_2=v_2t_2$

且：$h_2=h$

$2x_2=L$

解得：$v_2=\frac{L}{2}\sqrt{\frac{g}{2h}}$.

(3)如图，同理得：$h_3=\frac{1}{2}gt_3^2$



$x_3=v_3t_3$

且：$3x_3=2L$

设球从恰好越过球网到最高点的时间为 t，水平距离为 s，有：

$h_3-h=\frac{1}{2}gt^2$

$s=v_3t$

由几何关系得：$x_3+s=L$

解得：$h_3=\frac{4}{3}h$.

第三讲　基本运动之圆周运动

［章节练习］

1. **解**：(1)设小球经过第一个圆轨道的最高点时的速度为 v_1，根据动能定理

$$-\mu mgL_1-2mgR_1=\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_0^2 \quad ①$$

小球在最高点受到重力 mg 和轨道对它的作用力 F，根据牛顿第二定律

$$F+mg=m\frac{v_1^2}{R_1} \quad ②$$

由①②得 $F=10.0$ N. ③

(2)设小球在第二个圆轨道的最高点的速度为 v_2，由题意

$$mg=m\frac{v_2^2}{R_2} \quad ④$$

$$-\mu mg(L_1+L)-2mgR_2=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_0^2 \quad ⑤$$

由④⑤得 $L=12.5$ m. ⑥

(3)要保证小球不脱离轨道，可分两种情况进行讨论：

Ⅰ. 轨道半径较小时，小球恰能通过第三个圆轨道，设在最高点的速度为 v_3，应满足

$$mg=m\frac{v_3^2}{R_3} \quad ⑦$$

$$-\mu mg(L_1+2L)-2mgR_3=\frac{1}{2}mv_3^2-\frac{1}{2}mv_0^2 \quad ⑧$$

由⑥⑦⑧得 $R_3=0.4$ m

Ⅱ. 轨道半径较大时，小球上升的最大高度为 R_3，根据动能定理

$$-\mu mg(L_1+2L)-mgR_3=0-\frac{1}{2}mv_0^2$$

解得 $R_3=1.0$ m

为了保证圆轨道不重叠，R_3 最大值应满足 $(R_2+R_3)^2=L^2+(R_3-R_2)^2$

解得 $R_3=27.9$ m

综合Ⅰ、Ⅱ，要使小球不脱离轨道，则第三个圆轨道的半径须满足下面的条件

$0<R_3\leqslant 0.4$ m 或 $1.0\text{ m}\leqslant R_3\leqslant 27.9$ m

当 $0<R_3\leqslant 0.4$ m 时，小球最终停留点与起始点 A 的距离为 L'，则

$$-\mu mgL'=0-\frac{1}{2}mv_0^2$$

$L'=36.0$ m

当 1.0 m$\leqslant R_3\leqslant$27.9 m 时，小球最终停留点与起始点 A 的距离为 L''，则

$L''=L'-2(L'-L_1-2L)=26.0$ m.

2. **解**：(1)依题意，当弹簧竖直放置，长度被压缩至 l 时，质量为 $5m$ 的物体的动能为零，其重力势能转化为弹簧的弹性势能. 由机械能守恒定律，弹簧长度为 l 时的弹性势能

$E_p=5mgl$ ①

设 P 的质量为 M，到达 B 点时的速度大小为 v_B，由能量守恒定律得

$E_p=\frac{1}{2}Mv_B^2+\mu Mg\cdot 4l$ ②

联立①②式，取 $M=m$ 并代入题给数据得 $v_B=\sqrt{6gl}$ ③

若 P 能沿圆轨道运动到 D 点，其到达 D 点时的向心力不能小于重力，即 P 此时的速度大小 v 应满足

$\frac{mv^2}{l}-mg\geqslant 0$ ④

设 P 滑到 D 点时的速度为 v_D，由机械能守恒定律得

$\frac{1}{2}mv_B^2=\frac{1}{2}mv_D^2+mg\cdot 2l$ ⑤

联立③⑤式得 $v_D=\sqrt{2gl}$ ⑥

v_D 满足④式要求，故 P 能运动到 D 点，并从 D 点以速度 v_D 水平射出. 设 P 落回到轨道 AB 所需的时间为 t，由运动学公式得 $2l=\frac{1}{2}gt^2$ ⑦

P 落回到轨道 AB 上的位置与 B 点之间的距离为 $s=v_Dt$ ⑧

联立⑥⑦⑧式得 $s=2\sqrt{2}l$. ⑨

(2)为使 P 能滑上圆轨道，它到达 B 点时的速度不能小于零. 由①②式可知

$5mgl>\mu Mg\cdot 4l$ ⑩

要使 P 仍能沿圆轨道滑回，P 在圆轨道上的上升高度不能超过半圆轨道的中点 C. 由机械能守恒定律有

$\frac{1}{2}Mv_B^2\leqslant Mgl$ ⑪

联立①②⑩⑪式得 $\frac{5}{3}m\leqslant M<\frac{5}{2}m$. ⑫

3. **解**：(1)**解法 1：牛顿运动定律结合万有引力定律**

设卫星 B 绕地心转动的周期为 T'，根据万有引力定律和圆周运动的规律有

$G\frac{Mm}{h^2}=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2h$ ①

$G\frac{Mm'}{r^2}=m'\left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2r$ ②

式中，G 为引力常量，M 为地球质量，m、m' 分别为卫星 A、B 的质量. 由①②式得

$$T'=\left(\frac{r}{h}\right)^{\frac{3}{2}}T. \qquad ③$$

解法 2：运用开普勒运动定律求解

设卫星 B 绕地心转动的周期为 T'，根据开普勒第三定律，有

$$\frac{h^3}{T^2}=\frac{r^3}{T'^2}$$

解得 $T'=\left(\frac{r}{h}\right)^{\frac{3}{2}}T$.

(2)**解法 1：运用圆周运动规律求解**

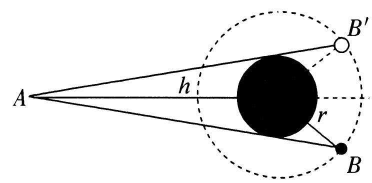
设卫星 A 和 B 连续地不能直接通信的最长时间间隔为 t.

在此时间间隔 t 内，卫星 A 和 B 绕地心转动的角度分别为 α 和 α'，则

$$\alpha=2\pi\frac{t}{T} \qquad ④$$

$$\alpha'=2\pi\frac{t}{T'} \qquad ⑤$$

若不考虑卫星 A 的公转，两卫星不能直接通信时，卫星 B 的位置应在图中 B 点和 B' 点之间，如图所示，图中内圆表示地球的赤道.



由几何关系得

$$\angle BOB'=2\left(\arcsin\frac{R}{h}+\arcsin\frac{R}{r}\right) \qquad ⑥$$

由③式知，当 $r<h$ 时，卫星 B 比卫星 A 转得快，考虑卫星 A 的公转后应有

$$\alpha'-\alpha=\angle BOB' \qquad ⑦$$

由③④⑤⑥⑦式得

$$t=\frac{r^{\frac{3}{2}}}{\pi(h^{\frac{3}{2}}-r^{\frac{3}{2}})}\left(\arcsin\frac{R}{h}+\arcsin\frac{R}{r}\right)T. \qquad ⑧$$

解法 2：利用相对角速度求解

设卫星 A 和 B 连续地不能直接通信的最长时间间隔为 t.

在此时间间隔 t 内，卫星 A 和 B 绕地心转动的角速度分别为 ω 和 ω'，根据周期公式，可得 $\omega=\frac{2\pi}{T}$，$\omega'=\frac{2\pi}{T'}$

卫星 B 相对 A 绕地心转动的角速度 $\omega_{相对}=\omega'-\omega$

由几何关系得

$$\angle BOB'=2\left(\arcsin\frac{R}{h}+\arcsin\frac{R}{r}\right)$$

由圆周运动规律有 $\angle BOB'=\omega_{相对}t$

联立求得 $t=\frac{r^{\frac{3}{2}}}{\pi(h^{\frac{3}{2}}-r^{\frac{3}{2}})}\left(\arcsin\frac{R}{h}+\arcsin\frac{R}{r}\right)T$.

4. **解**:(1)S2 星绕人马座 A^* 做圆周运动的向心力由人马座 A^* 对 S2 星的万有引力提供,设 S2 星的质量为 m_{S2},角速度为 ω,周期为 T,则

$$G\frac{M_A m_{S2}}{r^2}=m_{S2}\omega^2 r,$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T},$$

设地球质量为 m_E,公转轨道半径为 r_E,周期为 T_E,则

$$G\frac{M_S m_E}{r_E^2}=m_E\left(\frac{2\pi}{T_E}\right)^2 r_E,$$

联立上述三式得 $\frac{M_A}{M_S}=\left(\frac{r}{r_E}\right)^3\left(\frac{T_E}{T}\right)^2$.

式中 $T_E=1$ 年,

$r_E=1$ 天文单位,

代入数据可得 $\frac{M_A}{M_S}\approx 4\times 10^6$.

(2)引力对粒子作用不到的地方即为无限远,此时粒子的势能为零.“处于黑洞表面的粒子即使以光速运动,其具有的动能也不足以克服黑洞对它的引力束缚”,说明了黑洞表面处以光速运动的粒子在远离黑洞的过程中克服引力做功,粒子在到达无限远之前,其动能便减小为零,此时势能仍为负值,则其能量总和小于零.根据能量守恒定律,粒子在黑洞表面处的能量也小于零,则有 $\frac{1}{2}mc^2-G\frac{Mm}{R}<0$,

依题意可知 $R=R_A$,$M=M_A$,

可得 $R_A<\frac{2GM_A}{c^2}$,

代入数据得 $R_A<1.2\times 10^{10}$ m.

$\frac{R_A}{R_S}<17$.

第四讲　力学经典之碰撞类问题

[章节练习]

1. **解**:(1)设 Δt 时间内,从喷口喷出的水的体积为 ΔV,质量为 Δm,则

$\Delta m=\rho\Delta V$　①

$\Delta V=v_0 S\Delta t$　②

由①②式得,单位时间内从喷口喷出的水的质量为 $\frac{\Delta m}{\Delta t}=\rho v_0 S$.　③

(2)设玩具悬停时其底面相对于喷口的高度为 h,水从喷口喷出后到达玩具底面时的速度大小为 v. 对于 Δt 时间内喷出的水,由能量守恒得

$\frac{1}{2}(\Delta m)v^2+(\Delta m)gh=\frac{1}{2}(\Delta m)v_0^2$ ④

在 h 高度处，Δt 时间内喷射到玩具底面的水沿竖直方向的动量变化量的大小为

$\Delta p=(\Delta m)v$ ⑤

设水对玩具的作用力的大小为 F，根据动量定理有

$F\Delta t=\Delta p$ ⑥

由于玩具在空中悬停，由力的平衡条件得

$F=Mg$ ⑦

联立③④⑤⑥⑦式得

$h=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{M^2g}{2\rho^2v_0^2S^2}$. ⑧

2. **解**：(1)设物块 A 和 B 碰撞后共同运动的速度为 v'，由动量守恒定律有

$m_Bv=(m_A+m_B)v'$ ①

在碰后 A 和 B 共同上升的过程中，由机械能守恒定律有

$\frac{1}{2}(m_A+m_B)v'^2=(m_A+m_B)gh$ ②

联立①②式得 $h=\frac{m_B^2}{2g(m_A+m_B)^2}v^2$ ③

由题意得 $k_0=\frac{m_B^2}{2g(m_A+m_B)^2}$ ④

代入题给数据得 $k_0=2.04\times10^{-3}\ s^2/m$. ⑤

(2)按照定义 $\delta=\frac{|k-k_0|}{k_0}\times100\%$ ⑥

由⑤⑥式和题给条件得 $\delta=6\%$.

3. **解**：(1)物块 A 从滑入圆轨道到最高点 Q，根据机械能守恒定律，得

$\frac{1}{2}mv_0^2=mg\cdot2R+\frac{1}{2}mv^2$

所以 A 滑过 Q 点时的速度

$v=\sqrt{v_0^2-4gR}=\sqrt{6^2-4\times10\times0.5}\ m/s=4\ m/s>\sqrt{gR}=\sqrt{5}\ m/s$

在 Q 点根据牛顿第二定律和向心力公式，得

$mg+F=m\frac{v^2}{R}$

所以 A 受到的弹力 $F=\frac{mv^2}{R}-mg=\left(\frac{1\times4^2}{0.5}-1\times10\right)N=22\ N$.

(2)A 与 B 碰撞遵守动量守恒定律，设碰撞后的速度为 v'，则 $mv_0=2mv'$，

所以 $v'=\frac{1}{2}v_0=3\ \text{m/s}$

从碰撞到 AB 停止，根据动能定理，得

$$-2\mu mgkL=0-\frac{1}{2}\cdot 2mv'^2$$

所以 $k=\frac{v'^2}{2\mu gL}=\frac{3^2}{2\times 0.1\times 10\times 0.1}=45.$

(3)AB 从碰撞到滑至第 n 个光滑段根据动能定理，得

$$-2\mu mgnL=\frac{1}{2}\cdot 2mv_n^2-\frac{1}{2}\cdot 2mv'^2$$

解得 $v_n=\sqrt{9-0.2n}(n<k)$.

4.**解：解法 1：解析法**

设子弹初速度为 v_0，射入厚度为 $2d$ 的钢板后，最终钢板和子弹的共同速度为 V. 由动量守恒得

$$(2m+m)V=mv_0 \quad ①$$

解得 $V=\frac{1}{3}v_0$

此过程中动能的损失为

$$\Delta E=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}\times 3mV^2 \quad ②$$

解得 $\Delta E=\frac{1}{3}mv_0^2$

分成两块钢板后，设子弹穿过第一块钢板时两者的速度分别为 v_1 和 V_1，由动量守恒得

$$mv_1+mV_1=mv_0 \quad ③$$

因为子弹在钢板中受到的阻力为恒力，射穿第一块钢板的动能损失为 $\frac{\Delta E}{2}$，由能量守恒得 $\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mV_1^2=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{\Delta E}{2}$ ④

联立①②③④式，且考虑到 v_1 必须大于 V_1，得

$$v_1=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)v_0 \quad ⑤$$

设子弹射入第二块钢板并留在其中后两者的共同速度为 V_2，由动量守恒得

$$2mV_2=mv_1 \quad ⑥$$

损失的动能为 $\Delta E'=\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}\times 2mV_2^2$ ⑦

联立①②⑤⑥⑦式得 $\Delta E'=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{\Delta E}{2}$ ⑧

因为子弹在钢板中受到的阻力为恒力，由⑧式可得，射入第二块钢板的深度 x 为

$x=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)d.$ ⑨

解法 2：图象法

我们可以从条件“子弹在钢板中受到的阻力为恒力”入手，在总动量守恒的前提下，利用速度时间图象的丰富表现力，将整个过程用图象来表达. 设子弹在运动过程中受阻力作用的加速度为 a

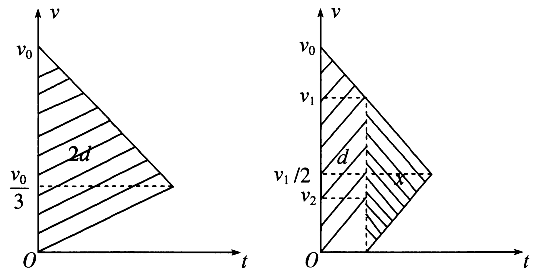


图 1　　图 2

由图 1 可知：$2d=\frac{1}{2}v_0\times\frac{2v_0}{3a}=\frac{v_0^2}{3a}$ ①

子弹射穿第一块钢板的速度为 v_1，钢板的速度为 v_2，则由图象可知：

$d=\frac{1}{2}(v_0+v_1-v_2)\frac{v_2}{a}$ ②

由图 2 可知，$v_0-v_1=v_2$ ③

子弹射入第二块钢板留在其中，共同速度为$\frac{v_1}{2}$，则由图象可得

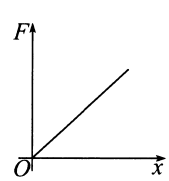
$x=\frac{v_1}{2}\times\frac{v_1}{2a}=\frac{v_1^2}{4a}$ ④

联立上述各式可得 $x=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)d.$

第五讲　力学经典之弹簧类问题

[**章节练习**]

1. **解**：(1)F-x 图象如图所示.



物块沿 x 轴从 O 点运动到位置 x 的过程中，弹力做负功；$F-x$ 图线下的面积等于弹力做功大小. 弹力做功

$W_T=-\frac{1}{2}\cdot kx\cdot x=-\frac{1}{2}kx^2.$

(2)a. 物块由 x_1 向右运动到 x_3 的过程中，弹力做功

$W_{T1}=-\frac{1}{2}\cdot(kx_1+kx_3)\cdot(x_3-x_1)=\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_3^2$

物块由 x_3 向左运动到 x_2 的过程中，弹力做功

$$W_{T2}=\frac{1}{2}\cdot(kx_2+kx_3)\cdot(x_3-x_2)=\frac{1}{2}kx_3^2-\frac{1}{2}kx_2^2$$

整个过程中，弹力做功

$$W_T=W_{T1}+W_{T2}=\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2$$

弹性势能的变化量

$$\Delta E_p=-W_T=\frac{1}{2}kx_2^2-\frac{1}{2}kx_1^2$$

b. 整个过程中，摩擦力做功

$$W_f=-\mu mg(2x_3-x_1-x_2)$$

与弹力做功比较，弹力做功与 x_3 无关，即与实际路径无关，只与始末位置有关，所以，我们可以定义一个由物体之间的相互作用力（弹力）和相对位置决定的能量——弹性势能. 而摩擦力做功与 x_3 有关，即与实际路径有关，所以，不可以定义与摩擦力对应的“摩擦力势能”.

2. **解**：(1) 装置静止时，设 OA、AB 杆中的弹力分别为 F_1、T_1，OA 杆与转轴的夹角为 θ_1.

小环受到弹簧的弹力 $F_{弹1}=k\cdot\frac{L}{2}$

小环受力平衡，$F_{弹1}=mg+2T_1\cos\theta_1$

小球受力平衡，$F_1\cos\theta_1+T_1\cos\theta_1=mg$

$F_1\sin\theta_1=T_1\sin\theta_1$

解得 $k=\frac{4mg}{L}$.

(2) 设 OA、AB 杆中的弹力分别为 F_2、T_2，OA 杆与转轴的夹角为 θ_2，弹簧长度为 x.

小环受到弹簧的弹力 $F_{弹2}=k(x-L)$

小环受力平衡，$F_{弹2}=mg$，得 $x=\frac{5}{4}L$

对小球，$F_2\cos\theta_2=mg$

$F_2\sin\theta_2=m\omega_0^2 l\sin\theta_2$

且 $\cos\theta_2=\frac{x}{2l}$

解得 $\omega_0=\sqrt{\frac{8g}{5L}}$.

(3) 弹簧长度为 $\frac{1}{2}L$ 时，设 OA、AB 杆中的弹力分别为 F_3、T_3，OA 杆与弹簧的夹角为 θ_3.

小环受到弹簧的弹力 $F_{弹3}=\frac{1}{2}kL$

小环受力平衡，$2T_3\cos\theta_3=mg+F_{弹3}$，且 $\cos\theta_3=\frac{L}{4l}$

对小球，$F_3\cos\theta_3=T_3\cos\theta_3+mg$

$F_3\sin\theta_3+T_3\sin\theta_3=m\omega_3^2 l\sin\theta_3$

解得 $\omega_3=\sqrt{\frac{16g}{L}}$

整个过程弹簧弹性势能变化为零，则弹力做的功为零，由动能定理

$W-mg\left(\frac{3L}{2}-\frac{L}{2}\right)-2mg\left(\frac{3L}{4}-\frac{L}{4}\right)=2\times\frac{1}{2}m(\omega_3 l\sin\theta_3)^2$

解得 $W=mgL+\frac{16mgl^2}{L}$.

3. **解**：(1)对整体分析，根据平衡条件可知，沿斜面方向上重力的分力与弹簧弹力平衡，则有：

$kx_0=\left(m+\frac{3}{5}m\right)g\sin\theta$

解得：$k=\frac{8mg\sin\theta}{5x_0}$.

(2)由题意可知，b 经两段相等的时间位移为 x_0；

由匀变速直线运动相邻相等时间内位移关系的规律可知：$\frac{x_1}{x_0}=\frac{1}{4}$

说明当形变量为 $x_1=x_0-\frac{x_0}{4}=\frac{3x_0}{4}$时二者分离；

对 m 分析，因分离时 ab 间没有弹力，则根据牛顿第二定律可知：$kx_1-mg\sin\theta=ma$

联立解得：$a=\frac{1}{5}g\sin\theta$.

(3)设 a、b 分离前经时间 t 时，a、b 前进的位移 $x=\frac{1}{2}at^2=\frac{g\sin\theta t^2}{10}$

则形变量变为：$\Delta x=x_0-x$

对整体分析可知，由牛顿第二定律有：$F+k\Delta x-\left(m+\frac{3}{5}m\right)g\sin\theta=\left(m+\frac{3}{5}m\right)a$

解得：$F=\frac{8}{25}mg\sin\theta+\frac{4mg^2\sin^2\theta}{25x_0}t^2$

因分离时位移 $x=\frac{x_0}{4}$

由 $x=\frac{x_0}{4}=\frac{1}{2}at^2$

解得：$t=\sqrt{\frac{5x_0}{2g\sin\theta}}$

故应保证 $0\leqslant t<\sqrt{\frac{5x_0}{2g\sin\theta}}$，$F$ 表达式才能成立.

4. **解**:(1)质量为 m 的鱼饵到达管口 C 时做圆周运动的向心力完全由重力提供,则

$$mg=m\frac{v_1^2}{R} \quad ①$$

由①式解得 $v_1=\sqrt{gR}$. ②

(2)弹簧的弹性势能全部转化为鱼饵的机械能,由机械能守恒定律有

$$E_p=mg(1.5R+R)+\frac{1}{2}mv_1^2 \quad ③$$

由②③式得 $E_p=3mgR$. ④

(3)不考虑因缓慢转动装置对鱼饵速度大小的影响,质量为 m 的鱼饵离开管口 C 后做平抛运动,设经过 t 时间落到水面上,离 OO' 的水平距离为 x_1,由平抛运动规律有

$$4.5R=\frac{1}{2}gt^2 \quad ⑤$$

$$x_1=v_1t+R \quad ⑥$$

由⑤⑥式解得 $x_1=4R$ ⑦

当鱼饵的质量为 $\frac{2}{3}m$ 时,设其到达管口 C 时速度大小为 v_2,由机械能守恒定律有

$$E_p=\frac{2}{3}mg(1.5R+R)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m\right)v_2^2 \quad ⑧$$

由④⑧式解得 $v_2=2\sqrt{gR}$ ⑨

质量为 $\frac{2}{3}m$ 的鱼饵落到水面上时,设离 OO' 的水平距离为 x_2,则

$$x_2=v_2t+R \quad ⑩$$

由⑤⑨⑩式解得 $x_2=7R$

鱼饵能够落到水面的最大面积 $S=\frac{1}{4}(\pi x_2^2-\pi x_1^2)=\frac{33}{4}\pi R^2$(或 $8.25\pi R^2$).

第六讲　力学经典之板块类问题

[**章节练习**]

1. **解**:(1)设货物的质量为 m,货物与车厢间的动摩擦因数 $\mu=0.4$,货物在车厢内滑动过程中,受到的摩擦力大小为 f,加速度大小为 a_1,则

$$f+mg\sin\theta=ma_1 \quad ①$$

$$f=\mu mg\cos\theta \quad ②$$

联立①②式并代入数据得 $a_1=5\ \mathrm{m/s^2}$ ③

a_1 的方向沿制动坡床向下.

(2)设货车的质量为 M,车尾位于制动坡床底端时的车速为 $v=23\ \text{m/s}$.货物在车厢内开始滑动到车头距制动坡床顶端 $s_0=38\ \text{m}$ 的过程中,用时为 t,货物相对制动坡床的运动距离为 s_1,在车厢内滑动的距离 $s=4\ \text{m}$,货车的加速度大小为 a_2,货车相对制动坡床的运动距离为 s_2.货车受到制动坡床的阻力大小为 F,F 是货车和货物总重的 k 倍,$k=0.44$,货车长度 $l_0=12\ \text{m}$,制动坡床的长度为 l,则

$Mg\sin\theta+F-f=Ma_2$ ④

$F=k(m+M)g$ ⑤

$s_1=vt-\frac{1}{2}a_1t^2$ ⑥

$s_2=vt-\frac{1}{2}a_2t^2$ ⑦

$s=s_1-s_2$ ⑧

$l=l_0+s_0+s_2$ ⑨

联立①②④～⑨并代入数据得 $l=98\ \text{m}$. ⑩

2.**解**:从 v-t 图象中获取速度及加速度信息.根据摩擦力提供加速度,且不同阶段的摩擦力不同,利用牛顿第二定律列方程求解.

(1)从 $t=0$ 时开始,木板与物块之间的摩擦力使物块加速,使木板减速,此过程一直持续到物块和木板具有共同速度为止.

由图可知,在 $t_1=0.5\ \text{s}$ 时,物块和木板的速度相同.设 $t=0$ 到 $t=t_1$ 时间间隔内,物块和木板的加速度大小分别为 a_1 和 a_2,则

$a_1=\frac{v_1}{t_1}$ ①

$a_2=\frac{v_0-v_1}{t_1}$ ②

式中 $v_0=5\ \text{m/s}$、$v_1=1\ \text{m/s}$ 分别为木板在 $t=0$、$t=t_1$ 时速度的大小.

设物块和木板的质量均为 m,物块和木板间、木板与地面间的动摩擦因数分别为 μ_1、μ_2,由牛顿第二定律得

$\mu_1mg=ma_1$ ③

$(\mu_1+2\mu_2)mg=ma_2$ ④

联立①②③④式得

$\mu_1=0.20$ ⑤

$\mu_2=0.30$. ⑥

(2)在 t_1 时刻后,地面对木板的摩擦力阻碍木板运动,物块与木板之间的摩擦力改变方向.设物块与木板之间的摩擦力大小为 f,物块和木板的加速度大小分别为 a'_1 和 a'_2,则由牛顿第二定律得

$f=ma'_1$ ⑦

$2\mu_2 mg - f = ma'_2$ ⑧

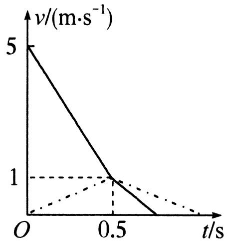
假设 $f < \mu_1 mg$，则 $a'_1 = a'_2$；

由⑤⑥⑦⑧式得 $f = \mu_2 mg > \mu_1 mg$，与假设矛盾，

故 $f = \mu_1 mg$ ⑨

由⑦⑨式知，物块加速度的大小 a'_1 等于 a_1；

物块的 v-t 图象如图中点划线所示.



由运动学公式可推知，物块和木板相对于地面的运动距离分别为

$s_1 = 2 \times \frac{v_1^2}{2a_1}$ ⑩

$s_2 = \frac{v_0 + v_1}{2} t_1 + \frac{v_1^2}{2a'_2}$ ⑪

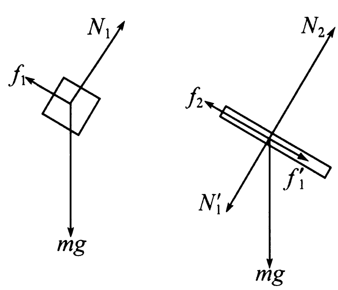
物块相对于木板的位移的大小为

$s = s_2 - s_1$ ⑫

联立①⑤⑥⑧⑨⑩⑪⑫式得

$s = 1.125\ \text{m}$. ⑬

3. **解**：(1)在 0～2 s 时间内，A 和 B 的受力如图所示，其中 f_1、N_1 是 A 与 B 之间的摩擦力和正压力的大小，f_2、N_2 是 B 与 C 之间的摩擦力和正压力的大小，方向如图所示. 由滑动摩擦力公式和力的平衡条件得



$f_1 = \mu_1 N_1$ ①

$N_1 = mg\cos\theta$ ②

$f_2 = \mu_2 N_2$ ③

$N_2 = N_1' + mg\cos\theta$ ④

规定沿斜面向下为正.设 A 和 B 的加速度分别为 a_1 和 a_2,由牛顿第二定律得

$mg\sin\theta - f_1 = ma_1$ ⑤

$mg\sin\theta - f_2 + f_1{}' = ma_2$ ⑥

$N_1 = N_1{}'$ ⑦

$f_1 = f_1{}'$ ⑧

联立①②③④⑤⑥⑦⑧式,并代入题给数据得

$a_1 = 3\ \text{m/s}^2$ ⑨

$a_2 = 1\ \text{m/s}^2$. ⑩

(2)在 $t_1 = 2$ s 时,设 A 和 B 的速度分别为 v_1 和 v_2,则

$v_1 = a_1 t_1 = 6\ \text{m/s}$ ⑪

$v_2 = a_2 t_1 = 2\ \text{m/s}$ ⑫

$t > t_1$ 时,设 A 和 B 的加速度分别为 a'_1 和 a'_2.此时 A 与 B 之间的摩擦力为零,同理可得

$a'_1 = 6\ \text{m/s}^2$ ⑬

$a'_2 = -2\ \text{m/s}^2$ ⑭

B 做减速运动.设经过时间 t_2,B 的速度减为零,则有

$v_2 + a'_2 t_2 = 0$ ⑮

联立⑫⑭⑮式得

$t_2 = 1$ s ⑯

在 $t_1 + t_2$ 时间内,A 相对于 B 运动的距离为

$$s = \left(\frac{1}{2}a_1 t_1^2 + v_1 t_2 + \frac{1}{2}a'_1 t_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}a_2 t_1^2 + v_2 t_2 + \frac{1}{2}a'_2 t_2^2\right)$$

$= 12\ \text{m} < 27\ \text{m}$ ⑰

此后 B 静止,A 继续在 B 上滑动.设再经过时间 t_3 后 A 离开 B,则有

$l - s = (v_1 + a'_1 t_2)t_3 + \frac{1}{2}a'_1 t_3^2$ ⑱

可得

$t_3 = 1$ s(另一解不合题意,舍去) ⑲

设 A 在 B 上总的运动时间为 $t_{总}$,有

$t_{总} = t_1 + t_2 + t_3 = 4$ s. ⑳

4. **解**:(1)设木板和物块的加速度分别为 a 和 a',在 t 时刻木板和物块的速度分别为 v_t 和 v'_t,木板和物块之间摩擦力的大小为 f,依据牛顿第二定律、运动学公式和摩擦定律得

$f = ma'$ ①

$f = \mu mg$ ②

$v'_{t2}=v'_{t1}+a'(t_2-t_1)$ ③

$F-f=(2m)a$ ④

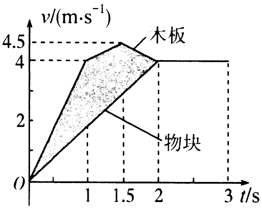
$v_{t2}=v_{t1}+a(t_2-t_1)$ ⑤

由①②③④⑤式与题给条件得

$v_1=4\ \text{m/s}, v_{1.5}=4.5\ \text{m/s}, v_2=4\ \text{m/s}, v_3=4\ \text{m/s}$ ⑥

$v'_2=4\ \text{m/s}, v'_3=4\ \text{m/s}$. ⑦

(2)由⑥⑦式得到物块与木板运动的 v-t 图象,如图所示.在 0～3 s 内物块相对于木板滑过的距离 Δs 等于木板和物块 v-t 图线下的面积之差,即图中带阴影的四边形面积,该四边形由两个三角形组成,上面的三角形面积为 0.25 m,下面的三角形面积为 2 m,因此 $\Delta s=2.25$ m. ⑧



第七讲 力学经典之传送带问题

[章节练习]

1. **解**:(1)设邮件放到皮带上与皮带发生相对滑动过程中受到的滑动摩擦力为 F,则

$F=\mu mg=ma$ ①

又 $v=at$

$Ft=mv-0$ ②

由①②式并代入数据得

$t=0.2$ s. ③

(2)邮件与皮带发生相对滑动的过程中,对邮件应用动能定理,有

$Fx=\frac{1}{2}mv^2-0$ ④

由①④式并代入数据得

$x=0.1$ m. ⑤

(3)邮件与皮带发生相对滑动的过程中,设皮带相对地面的位移为 s,则

$s=vt$ ⑥

摩擦力对皮带做的功

$W=-Fs$ ⑦

由①③⑥⑦式并代入数据得

$W=-2$ J.

2. **解**:(1)物块从静止开始做匀加速直线运动到 A 过程,滑动摩擦力做正功,物块从 A 到 B,重力做正功,根据动能定理,$\mu mgs+mg2R=\frac{1}{2}mv_B^2$,解得:$v_B=3\sqrt{gR}$.

(2)物块从 B 滑上滑板后开始做匀减速运动，此时滑板开始做匀加速直线运动，当物块与滑板达共同速度时，二者开始做匀速直线运动. 设它们的共同速度为 v，根据动量守恒定律得

$mv_B=(m+2m)v$，解得：$v=\frac{v_B}{3}$

对物块，用动能定理列方程：$-\mu mgs_1=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_B^2$，解得：$s_1=8R$

对滑板，用动能定理列方程：$-\mu mgs_2=\frac{1}{2}\times 2mv^2-0$，解得：$s_2=2R$

由此可知物块在滑板上滑过 $s_1-s_2=6R$ 时，小于 $6.5R$，并没有滑下去，二者就具有共同速度了.

当 $2R\leqslant L<5R$ 时，物块的运动是匀减速运动 $8R$，匀速运动 $L-2R$，匀减速运动 $0.5R$，滑上 C 点，根据动能定理：$-\mu mg(8R+0.5R)=\frac{1}{2}mv_C^2-\frac{1}{2}mv_B^2$，解得：$\frac{1}{2}mv_C^2=\frac{1}{2}mgR<mgR$，

$W_f=\mu mg(8R+0.5R)=\frac{17}{4}mgR$，物块不能滑到 CD 轨道的中点.

当 $R<L<2R$ 时，物块的运动是匀减速运动 $6.5R+L$，滑上 C 点. 根据动能定理：

$-\mu mg(6.5R+L)=\frac{1}{2}mv_C^2-\frac{1}{2}mv_B^2$，解得：$W_f=\mu mg(6.5R+L)=\frac{1}{4}mg(13R+2L)$

当 $\frac{1}{2}mv_C^2=\frac{1}{2}mg(2.5R-L)\geqslant mgR$ 时，可以滑到 CD 轨道的中点，此时要求 $L<0.5R$，这与题目矛盾，所以物块不可能滑到 CD 轨道的中点.

3. **解**：(1)设物块 B 沿光滑曲面下滑到水平位置时的速度大小为 v_0. 由机械能守恒知

$mgh=\frac{1}{2}mv_0^2$

得 $v_0=\sqrt{2gh}$

设物块 B 在传送带上滑动过程中因受摩擦力所产生的加速度大小为 a，则

$\mu mg=ma$

设物块 B 通过传送带后运动速度大小为 v，有

$v^2-v_0^2=-2al$

联立解得 $v=4$ m/s

由于 $v>2$ m/s，所以 $v=4$ m/s 即为物块 B 与物块 A 第一次碰撞前的速度大小.

(2)设物块 A、B 第一次碰撞后的速度分别为 V、v_1，取向右为正方向，由弹性碰撞知

$-mv=mv_1+MV$

$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}MV^2$

解得 $v_1=\frac{1}{3}v=\frac{4}{3}$ m/s

即碰撞后物块 B 沿水平台面向右匀速运动.

设物块 B 在传送带上向右运动的最大位移为 l',则

$0-v_1^2=-2al'$

得 $l'=\frac{4}{9}\ \text{m}<1\ \text{m}$

所以物块 B 不能通过传送带运动到右边的曲面上.

(3)当物块 B 在传送带上向右运动的速度为零后,将会沿传送带向左加速.可以判断,物块 B 运动到左边台面时的速度大小为 v_1,继而与物块 A 发生第二次碰撞.设第二次碰撞后物块 B 速度大小为 v_2,同上计算可知

$v_2=\frac{1}{3}v_1=\left(\frac{1}{3}\right)^2 v$

物块 B 与物块 A 第三次碰撞、第四次碰撞…,碰撞后物块 B 的速度大小依次为

$v_3=\frac{1}{3}v_2=\left(\frac{1}{3}\right)^3 v$

$v_4=\frac{1}{3}v_3=\left(\frac{1}{3}\right)^4 v$

…

则第 n 次碰撞后物块 B 的速度大小为

$v_n=(\frac{1}{3})^n v=\frac{4}{3^n}\ \text{m/s}.$

4.**解**:以地面为参考系(下同),设传送带的运动速度为 v_0,在水平段运输的过程中,小货箱先在滑动摩擦力作用下做匀加速直线运动,设这段路程为 s,所用的时间为 t,加速度为 a,则对小货箱有

$s=\frac{1}{2}at^2$ ①

$v_0=at$ ②

在这段时间内,传送带运动的路程为

$s_0=v_0 t$ ③

由以上各式得

$s_0=2s$ ④

用 f 表示小货箱与传送带之间的滑动摩擦力,则传送带对小货箱做功为

$W_1=fs=\frac{1}{2}mv_0^2$ ⑤

传送带克服小货箱对它的摩擦力做功

$W_2=fs_0=2\times\frac{1}{2}mv_0^2$ ⑥

两者之差就是克服摩擦力做功产生的热量

$Q=\frac{1}{2}mv_0^2$ ⑦

可见，在小货箱加速运动过程中，获得的动能与发热量相等.

T 时间内，电动机输出的功为 $W=\overline{P}T$ ⑧

此功用于增加小货箱的动能、势能以及克服摩擦力发热，即

$W=\frac{1}{2}Nmv_0^2+Nmgh+NQ$ ⑨

已知相邻两小货箱的距离为 L，所以

$v_0T=NL$ ⑩

联立⑦⑧⑨⑩式，得

$\overline{P}=\frac{Nm}{T}\left(\frac{N^2L^2}{T^2}+gh\right)$.

第二章　电学综合篇

第八讲　带电粒子在电场中的运动

[章节练习]

1. **解**：(1)设质子进入漂移管 B 的速度为 v_B，电源频率、周期分别为 f、T，漂移管 B 的长度为 L，则

$T=\frac{1}{f}$ ①

$L=v_B\cdot\frac{T}{2}$ ②

联立①②式并代入数据得 $L=0.4$ m. ③

(2)设质子进入漂移管 E 的速度为 v_E，相邻漂移管间的加速电压为 U，电场对质子所做的功为 W，质子从漂移管 B 运动到 E 电场做功 W'，质子的电荷量为 q、质量为 m，则

$W=qU$ ④

$W'=3W$ ⑤

$W'=\frac{1}{2}mv_E^2-\frac{1}{2}mv_B^2$ ⑥

联立④⑤⑥式并代入数据得 $U=6\times10^4$ V.

2. **解**：(1)由动能定理得 $E_{km}=eU_m$，可得

$U_m=\frac{E_{km}}{e}$

短路时所有逸出的电子都到达 B 板，故短路电流

$I_{短}=Ne$.

(2)电源的电动势等于断路时的路端电压，即上面求出的 U_m，所以 $E=U_m=\frac{E_{km}}{e}$

电源内阻 $r=\frac{E}{I_{短}}=\frac{E_{km}}{Ne^2}$.

(3)设电阻两端的电压为 U，则电源两端的电压也是 U.

由动能定理知，一个电子经电源内部电场后损失的动能

$\Delta E_{ke}=eU$

设单位时间内有 N' 个电子到达 B 板，则损失的动能之和

$\Delta E_k=N'\Delta E_{ke}=N'eU$

根据电流的定义，此时电源内部的电流 $I=N'e$

此时流过外电阻的电流也是 $I=N'e$，外电阻上消耗的电功率 $P=IU=N'eU$

所以 $P=\Delta E_k$.

3. **解**：(1)设电容器 C 两板间的电压为 U，电场强度大小为 E，电子在极板间穿行时 y 方向上的加速度大小为 a，穿过 C 的时间为 t_1，穿出时电子偏转的距离为 y_1，

$U=\frac{\varepsilon R_1}{R_1+R_2}$ ①

$E=\frac{U}{d}$ ②

$eE=ma$ ③

$t_1=\frac{l_1}{v_0}$ ④

$y_1=\frac{1}{2}at_1^2$ ⑤

由以上各式得 $y_1=\frac{e\varepsilon}{2mv_0^2}(\frac{R_1}{R_1+R_2})\frac{l_1^2}{d}$ ⑥

代入数据得 $y_1=4.8\times10^{-3}$ m ⑦

由此可见 $y_1<\frac{1}{2}d$，电子可通过 C.

设电子从 C 穿出时，沿 y 方向的速度为 v，穿出后到达屏 S 所经历的时间为 t_2，在此时间内电子在 y 方向移动的距离为 y_2，

$v_1=at_1$ ⑧

$t_2=\frac{l_2}{v_0}$ ⑨

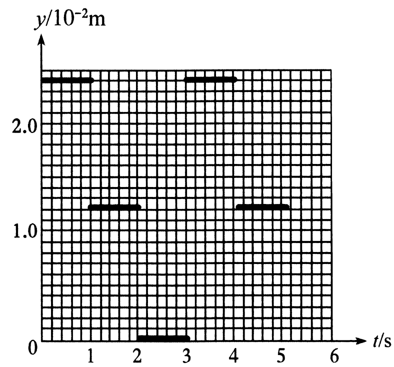
$y_2=v_1t_2$ ⑩

由以上有关各式得 $y_2=\frac{e\varepsilon}{mv_0^2}(\frac{R_1}{R_1+R_2})\frac{l_1l_2}{d}$ ⑪

代入数据得 $y_2=1.92\times10^{-2}$ m ⑫

由题意 $y=y_1+y_2=2.4\times10^{-2}$ m. ⑬

(2)如图所示.



4.**解**:(1)收集效率 η 为 81%,即离下板 $0.81d_0$ 的尘埃恰好到达下板的右端边缘,设高压电源的电压为 U,则在水平方向有 $L=v_0t$ ①

在竖直方向有 $0.81d_0=\frac{1}{2}at^2$ ②

其中 $a=\frac{F}{m}=\frac{qE}{m}=\frac{qU}{md_0}$ ③

当减小两板间距时,能够增大电场强度,提高装置对尘埃的收集效率.收集效率恰好为 100%时,两板间距即为 d_m.如果进一步减小 d,收集效率仍为 100%.

因此,在水平方向有 $L=v_0t$ ④

在竖直方向有 $d_m=\frac{1}{2}a't^2$ ⑤

其中 $a'=\frac{F'}{m}=\frac{qE'}{m}=\frac{qU}{md_m}$ ⑥

联立①②③④⑤⑥可得 $d_m=0.9d_0$. ⑦

(2)通过前面的求解可知,当 $d\leqslant0.9d_0$ 时,收集效率 η 均为 100%

当 $d>0.9d_0$ 时,设距下板 x 处的尘埃恰好到达下板的右端边缘,此时有

$x=\frac{1}{2}\frac{qU}{md}(\frac{L}{v_0})^2$ ⑧

根据题意,收集效率为 $\eta=\frac{x}{d}$ ⑨

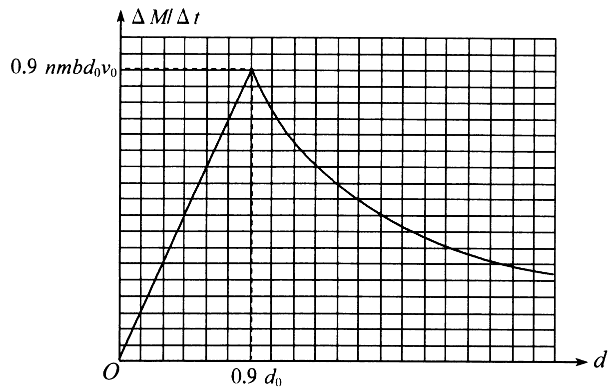
联立①②③⑧⑨可得 $\eta=0.81(\frac{d_0}{d})^2$.

(3)稳定工作时单位时间下板收集的尘埃质量为 $\frac{\Delta M}{\Delta t}=\eta nmbdv_0$

当 $d\leqslant0.9d_0$ 时,$\eta=1$,因此 $\frac{\Delta M}{\Delta t}=nmbdv_0$

当 $d>0.9d_0$ 时，$\eta=0.81(\frac{d_0}{d})^2$，因此 $\frac{\Delta M}{\Delta t}=0.81nmbv_0\frac{d_0^2}{d}$

绘出的图线如下



第九讲　带电粒子在磁场中的运动

［章节练习］

1. **解**：(1)带电粒子在磁场中做匀速圆周运动，在时间 t_0 内其速度方向改变了 90°，故其周期

$T=4t_0$ ①

设磁感应强度大小为 B，带电粒子速度大小为 v，圆周运动的半径为 r. 由洛伦兹力公式和牛顿定律得

$qvB=m\frac{v^2}{r}$ ②

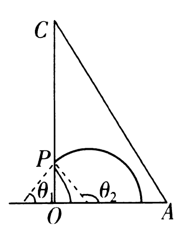
匀速圆周运动速度满足 $v=\frac{2\pi r}{T}$ ③

联立①②③式得 $B=\frac{\pi m}{2qt_0}$. ④

(2)设带电粒子从 OA 边两个不同位置射入磁场，能从 OC 边上的同一点 P 射出磁场，带电粒子在磁场中运动的轨迹如图(a)所示. 设两轨迹所对应的圆心角分别为 θ_1 和 θ_2. 由几何关系有

$\theta_1=180°-\theta_2$ ⑤

带电粒子两次在磁场中运动的时间分别为 t_1 与 t_2，则

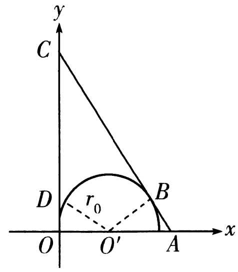


图(a)

$t_1+t_2=\frac{T}{2}=2t_0$. ⑥

(3)如图(b)所示，由题给条件可知，该粒子在磁场区域中的轨迹圆弧对应的圆心角为 150°. 设 O' 为圆弧的圆心，圆弧的半径为 r_0，圆弧与 AC 相切于 B 点，从 D 点射出磁场，由几何关系和题给条件可知，此时有

$\angle OO'D = \angle BO'A = 30°$ ⑦



图(b)

$r_0 \cos\angle OO'D + \dfrac{r_0}{\cos\angle BO'A} = L$ ⑧

设粒子此次入射速度的大小为 v_0，由圆周运动规律 $v_0 = \dfrac{2\pi r_0}{T}$ ⑨

联立①⑦⑧⑨式得 $v_0 = \dfrac{\sqrt{3}\pi L}{7t_0}$. ⑩

2.**解**:(1)设粒子做圆周运动的半径为 R_1，洛伦兹力提供向心力，则有 $qv_0B_0 = \dfrac{mv_0^2}{R_1}$ ①

据题意由几何关系得

$R_1 = d$ ②

联立①②式得

$B_0 = \dfrac{mv_0}{qd}$. ③

(2)设粒子做圆周运动的半径为 R_2，加速度大小为 a，由圆周运动公式得

$a = \dfrac{v_0^2}{R_2}$ ④

据题意由几何关系得

$3R_2 = d$ ⑤

联立④⑤式得

$a = \dfrac{3v_0^2}{d}$. ⑥

(3)设粒子做圆周运动的半径为 R，周期为 T，由圆周运动公式得 $T = \dfrac{2\pi R}{v_0}$ ⑦

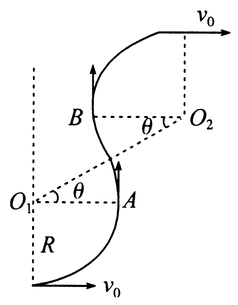
由牛顿第二定律得

$qv_0B_0 = \dfrac{mv_0^2}{R}$ ⑧

由题意知 $B_0=\frac{4mv_0}{qd}$，代入⑧式得

$d=4R$ ⑨

粒子运动轨迹如图所示，O_1、O_2 为圆心，O_1O_2 连线与水平方向的夹角为 θ，在每个 T_B 内，只有 A、B 两个位置才有可能垂直击中 P 板，且要求 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，由题意可知



$\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{2\pi}T=\frac{T_B}{2}$ ⑩

设经历完整 T_B 的个数为 $n(n=0,1,2,3\cdots)$

若在 A 点击中 P 板，据题意由几何关系得

$R+2(R+R\sin\theta)n=d$ ⑪

当 $n=0$ 时，无解 ⑫

当 $n=1$ 时，联立⑨⑪式得

$\theta=\frac{\pi}{6}$（或 $\sin\theta=\frac{1}{2}$） ⑬

联立⑦⑨⑩⑬式得

$T_B=\frac{\pi d}{3v_0}$ ⑭

当 $n\geqslant 2$ 时，不满足 $0<\theta<90^\circ$ 的要求 ⑮

若在 B 点击中 P 板，据题意由几何关系得

$R+2R\sin\theta+2(R+R\sin\theta)n=d$ ⑯

当 $n=0$ 时，无解 ⑰

当 $n=1$ 时，联立⑨⑯式得

$\theta=\arcsin\frac{1}{4}$（或 $\sin\theta=\frac{1}{4}$） ⑱

联立⑦⑨⑩⑱式得

$T_B=\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{4}\right)\frac{d}{2v_0}$ ⑲

当 $n\geqslant 2$ 时，不满足 $0<\theta<90^\circ$ 的要求.

3. **解**：(1)洛伦兹力提供向心力，有 $qvB_0=m\frac{v^2}{R}$

圆周运动的半径 $R=L$

解得 $\frac{q}{m}=\frac{v}{B_0L}$.

(2)如图 1 所示,以最大值 θ_m 入射时,有

$\Delta x=2R(1-\cos\theta_m)=L$ 或 $2R\cos\theta_m=L$

解得 $\theta_m=\frac{\pi}{3}$.

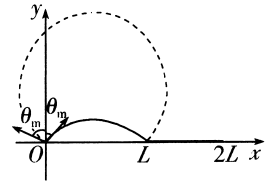


图1

(3)$B>B_0$,全部收集到离子时的最小半径为 R_1,如图 2 所示,有

$2R_1\cos 37°=L$

解得 $B_1=\frac{mv}{qR_1}=1.6B_0$

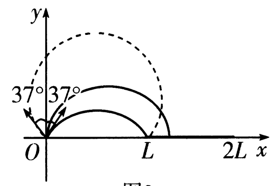


图2

当 $B_0\leqslant B\leqslant 1.6B_0$ 时,有 $n_1=n_0$

$B>1.6B_0$,恰好收集不到离子时的半径为 R_2,有 $R_2=0.5L$

解得 $B_2=2B_0$

当 $1.6B_0<B\leqslant 2B_0$ 时,设 $R'=\frac{mv}{qB}$,

有 $n_2=\frac{2R'-L}{2R'(1-\cos 37°)}n_0=n_0(5-\frac{5B}{2B_0})$

当 $2B_0<B\leqslant 3B_0$ 时,有 $n_3=0$.

4.**解**:(1)初速度与 y 轴方向平行的粒子在磁场中的运动轨迹如图 1 中的弧 OP 所示,其圆心为 C.由几何关系可知,$\angle POC=30°$;$\triangle OCP$ 为等腰三角形,故$\angle OCP=\frac{2\pi}{3}$ ①

此粒子飞出磁场所用的时间为 $t_0=\frac{T}{3}$ ②

式中 T 为粒子做圆周运动的周期.

设粒子运动速度的大小为 v,半径为 R,由几何关系可得 $R=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$ ③

由洛伦兹力公式和牛顿第二定律有

$qvB=m\frac{v^2}{R}$ ④

$T=\frac{2\pi R}{v}$ ⑤

联立②③④⑤解得$\frac{q}{m}=\frac{2\pi}{3Bt_0}$. ⑥

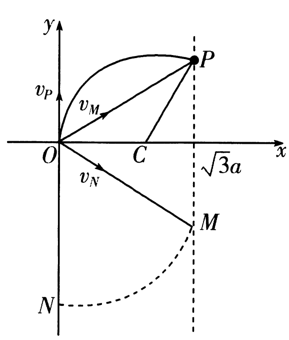


图1

(2)仍在磁场中的粒子其圆心角一定大于 120°，这样粒子角度最小时从磁场右边界穿出；角度最大时从磁场左边界穿出. 依题意，所有粒子在磁场中转动时间相同，则转过的圆心角相同，故弦长相等；同一时刻仍在磁场内的粒子到 O 点距离相同. 在 t_0 时刻仍在磁场中的粒子应位于以 O 点为圆心、OP 为半径的弧$\overset{\frown}{MN}$上.（弧$\overset{\frown}{MN}$只代表初速度与 y 轴正方向为 60°时粒子的运动轨迹）如图 2 所示.

设此时位于 P、M、N 三点的粒子的初速度分别为 v_P、v_M、v_N. 由对称性可知 v_P 与 OP、v_M 与 OM、v_N 与 ON 的夹角均为$\frac{\pi}{3}$.

设 v_M、v_N 与 y 轴正向的夹角分别为 θ_M、θ_N，

由几何关系有 $\theta_M=\frac{\pi}{3}$ ⑦

$\theta_N=\frac{2\pi}{3}$ ⑧

对于所有此时仍在磁场中的粒子，其初速度与 y 轴正方向所成的夹角 θ 应满足

$\frac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}$.

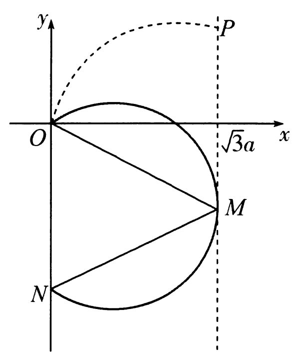


图2

(3)在磁场中飞行时间最长的粒子的运动轨迹应与磁场右边界相切，其轨迹如图 2 所示. 由几何关系可知 $OM=OP$

由对称性可知 $MN=OP$

由图可知，圆的圆心角为 240°，从粒子发射到全部粒子飞出磁场所用的时间为 $2t_0$.

第十讲　带电粒子在电磁场中的运动

［章节练习］

1. **解**：(1)洛仑兹力不做功，由动能定理得：$mgy=\frac{1}{2}mv^2$　①

解得：$v=\sqrt{2gy}$.　②

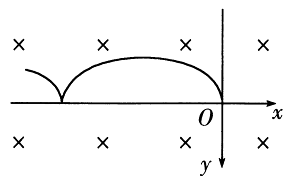
(2)设在最大距离 y_m 处的速率为 v_m，根据圆周运动有：$qBv_m-mg=m\frac{v_m^2}{R}$　③

且由②得 $v_m=\sqrt{2gy_m}$　④

由③④及 $R=2y_m$

得：$y_m=\frac{2m^2g}{q^2B^2}$.　⑤

(3)小球运动如图所示



由动能定理得：$(qE-mg)|y_m|=\frac{1}{2}mv_m^2$　⑥

由圆周运动得：$qBv_m+mg-qE=m\frac{v_m^2}{R}$　⑦

由⑥、⑦且 $R=2|y_m|$

解得：$v_m=\frac{2}{qB}(qE-mg)$.

2. **解**：(1)由于洛伦兹力不做功，只有电场力做功，由动能定理有

$-qEh=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$　①

由①式解得 $v=\sqrt{v_0^2-\frac{2qEh}{m}}$.　②

(2)Ⅰ.由图乙可知，所有粒子在一个周期 T 内沿 x 轴方向前进的距离相同，即都等于恰好沿 x 轴方向匀速运动的粒子在 T 时间内前进的距离.设粒子恰好沿 x 轴方向匀速运动的速度大小为 v_1，则

$qv_1B=qE$　③

又 $s=v_1T$　④

式中 $T=\frac{2\pi m}{qB}$

由③④式解得 $s=\frac{2\pi mE}{qB^2}$. ⑤

Ⅱ.设粒子在 y 方向上的最大位移为 y_m(图丙曲线的最高点处),对应的粒子运动速度大小为 v_2(方向沿 x 轴),因为粒子在 y 方向上的运动为简谐运动,因而在 $y=0$ 和 $y=y_m$ 处粒子所受的合外力大小相等,方向相反,则

$qv_0B-qE=-(qv_2B-qE)$ ⑥

由动能定理有 $-qEy_m=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_0^2$ ⑦

又 $A_y=\frac{1}{2}y_m$ ⑧

由⑥⑦⑧式解得 $A_y=\frac{m}{qB}(v_0-\frac{E}{B})$

可写出图丙曲线满足的简谐运动 $y-t$ 函数表达式为 $y=\frac{m}{qB}(v_0-\frac{E}{B})(1-\cos\frac{qB}{m}t)$.

3.**解**:(1)设极板间电场强度的大小为 E,对粒子在电场中的加速运动,由动能定理得

$qE\frac{d}{2}=\frac{1}{2}mv^2$ ①

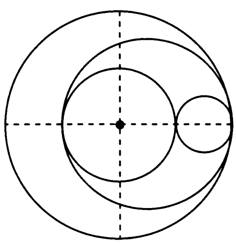
由①式得

$E=\frac{mv^2}{qd}$. ②

(2)设Ⅰ区磁感应强度的大小为 B,粒子做圆周运动的半径为 R,由牛顿第二定律得

$qvB=m\frac{v^2}{R}$ ③

如图甲所示,粒子运动轨迹与小圆相切有两种情况.若粒子轨迹与小圆外切,由几何关系得



甲

$R=\frac{D}{4}$ ④

联立③④式得

$B=\frac{4mv}{qD}$ ⑤

若粒子轨迹与小圆内切,由几何关系得

$R=\frac{3D}{4}$ ⑥

联立③⑥式得

$B=\frac{4mv}{3qD}$. ⑦

(3)设粒子在Ⅰ区和Ⅱ区做圆周运动的半径分别为 R_1、R_2，由题意可知，Ⅰ区和Ⅱ区磁感应强度的大小分别为$B_1=\frac{2mv}{qD}$、$B_2=\frac{4mv}{qD}$，

由牛顿第二定律得

$qvB_1=m\frac{v^2}{R_1}$，$qvB_2=m\frac{v^2}{R_2}$ ⑧

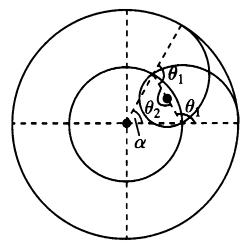
代入数据得

$R_1=\frac{D}{2}$，$R_2=\frac{D}{4}$ ⑨

设粒子在Ⅰ区和Ⅱ区做圆周运动的周期分别为 T_1、T_2，由运动学公式得

$T_1=\frac{2\pi R_1}{v}$，$T_2=\frac{2\pi R_2}{v}$ ⑩

据题意分析，粒子两次与大圆相切的时间间隔内，运动轨迹如图乙所示，根据对称性可知，Ⅰ区两段圆弧所对圆心角相同，设为 θ_1，Ⅱ区内圆弧所对圆心角设为 θ_2，圆弧和大圆的两个切点与圆心 O 连线间的夹角设为 α，由几何关系得



乙

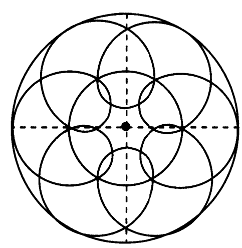
$\theta_1=120°$ ⑪

$\theta_2=180°$ ⑫

$\alpha=60°$ ⑬

粒子重复上述交替运动回到 H 点，轨迹如图丙所示，设粒子在Ⅰ区和Ⅱ区做圆周运动的时间分别为 t_1、t_2，可得

$t_1=\frac{360°}{\alpha}\times\frac{\theta_1\times2}{360°}T_1$，$t_2=\frac{360°}{\alpha}\times\frac{\theta_2}{360°}T_2$ ⑭


丙

设粒子运动的路程为 s，

由运动学公式得

$s=v(t_1+t_2)$ ⑮

联立⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮式得

$s=5.5\pi D$. ⑯

4.**解**：(1)在电场中，粒子做类平抛运动，设 Q 点到 x 轴距离为 L，到 y 轴距离为 $2L$，粒子的加速度为 a，运动时间为 t，有

$2L=v_0t$ ①

$L=\frac{1}{2}at^2$ ②

设粒子到达 O 点时沿 y 轴方向的分速度为 v_y

$v_y=at$ ③

设粒子到达 O 点时速度方向与 x 轴正方向夹角为 α，有 $\tan\alpha=\frac{v_y}{v_0}$ ④

联立①②③④式得 $\alpha=45°$ ⑤

即粒子到达 O 点时速度方向与 x 轴正方向成 45°角斜向上.

设粒子到达 O 点时速度大小为 v，由运动的合成有

$v=\sqrt{v_0^2+v_y^2}$ ⑥

联立①②③⑥式得 $v=\sqrt{2}v_0$. ⑦

(2)设电场强度为 E，粒子电荷量为 q，质量为 m，粒子在电场中受到的电场力为 F，由牛顿第二定律可得

$F=ma$ ⑧

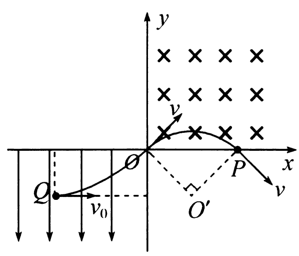
又 $F=qE$ ⑨

设磁场的磁感应强度大小为 B，粒子在磁场中做匀速圆周运动的半径为 R，所受的洛伦兹力提供向心力，

有 $qvB=m\frac{v^2}{R}$ ⑩

由几何关系可知 $R=\sqrt{2}L$ ⑪

联立①②⑦⑧⑨⑩⑪式得 $\frac{E}{B}=\frac{v_0}{2}$.



第十一讲　带电粒子在复合场中的运动

［章节练习］

1. **解**：(1)由图可知，当 $x=0.3$ m 时，$F_1=k\frac{qQ}{x^2}=0.018$ N

因此 $q=\frac{F_1x^2}{kQ}=1\times10^{-6}$ C.

(2)设在 $x=0.3$ m 处点电荷与小球间作用力为 F_2，

$F_合=F_2+qE$

因此 $E=\frac{F_{合}-F_2}{q}=\frac{-0.012-0.018}{1\times10^{-6}}$ N/C $=-3\times10^4$ N/C

电场在 $x=0.3$ m 处沿细杆方向的电场强度大小为 3×10^4 N/C,方向水平向左.

(3)根据图象可知在 $x=0.4$ m 与 $x=0.6$ m 之间合力做功大小

$W_{合}=0.004\times0.2$ J $=8\times10^{-4}$ J

由 $qU=W_{合}$ 可得 $U=\frac{W_{合}}{q}=800$ V.

(4)由图可知小球从 $x=0.16$ m 到 $x=0.2$ m 处

电场力做功 $W_1=\frac{0.03\times0.04}{2}$ J $=6\times10^{-4}$ J

小球从 $x=0.2$ m 到 $x=0.4$ m 处

电场力做功 $W_2=-\frac{1}{2}mv^2=-1.6\times10^{-3}$ J

由图可知小球从 $x=0.4$ m 到 $x=0.8$ m 处

电场力做功 $W_3=-0.004\times0.4$ J $=-1.6\times10^{-3}$ J

由动能定理 $W_1+W_2+W_3+F_{外}s=0$

解得 $s=-\frac{W_1+W_2+W_3}{F_{外}}=0.065$ m.

2.**解**:(1)设小球的初速度为 v_0,初动能为 E_{k0},从 O 点运动到 A 点的时间为 t,令 $OA=d$,则 $OB=\frac{3}{2}d$,根据平抛运动的规律有

$d\sin 60°=v_0t$ ①

$d\cos 60°=\frac{1}{2}gt^2$ ②

又有 $E_{k0}=\frac{1}{2}mv_0^2$ ③

由①②③式得

$E_{k0}=\frac{3}{8}mgd$ ④

设小球到达 A 点时的动能为 E_{kA},则

$E_{kA}=E_{k0}+\frac{1}{2}mgd$ ⑤

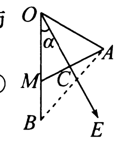
由④⑤式得 $\frac{E_{kA}}{E_{k0}}=\frac{7}{3}$. ⑥

(2)加电场后,小球从 O 点到 A 点和 B 点,高度分别降低了 $\frac{d}{2}$ 和 $\frac{3d}{2}$,设电势能分别减小 ΔE_{pA} 和 ΔE_{pB},由能量守恒及④式得

$\Delta E_{pA}=3E_{k0}-E_{k0}-\frac{1}{2}mgd=\frac{2}{3}E_{k0}$ ⑦

$\Delta E_{pB}=6E_{k0}-E_{k0}-\frac{3}{2}mgd=E_{k0}$ ⑧

在匀强电场中，沿任一直线，电势的降落是均匀的. 设直线 OB 上的 M 点与 A 点等电势，M 与 O 点的距离为 x，如图，则有 $\frac{x}{\frac{3}{2}d}=\frac{\Delta E_{pA}}{\Delta E_{pB}}$ ⑨



解得 $x=d$，MA 为等势线，电场强度方向必与其垂线 OC 方向平行. 设电场强度方向与竖直向下的方向的夹角为 α，由几何关系可得 $\alpha=30°$ ⑩

即电场方向与竖直向下的方向的夹角为 30°.

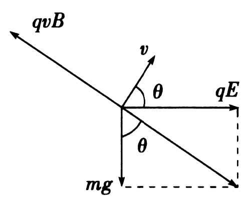
设电场强度的大小为 E，有

$qEd\cos 30°=\Delta E_{pA}$ ⑪

由④⑦⑪式得

$E=\frac{\sqrt{3}mg}{6q}$. ⑫

3. **解**：(1)小球匀速直线运动时受力如图，其所受的三个力在同一平面内，合力为零，则



$qvB=\sqrt{q^2E^2+m^2g^2}$ ①

代入数据解得 $v=20$ m/s ②

速度 v 的方向斜向右上方，与电场 E 的方向之间的夹角 θ 满足 $\tan\theta=\frac{qE}{mg}$ ③

代入数据解得 $\tan\theta=\sqrt{3}$，$\theta=60°$. ④

(2)**解法 1**：撤去磁场，小球在重力与电场力的合力作用下做类平抛运动，设其加速度为 a，有

$a=\sqrt{\frac{q^2E^2+m^2g^2}{m}}$ ⑤

设撤去磁场后小球在初速度方向上的分位移为 x，有 $x=vt$ ⑥

设小球在重力与电场力的合力方向上分位移为 y，有

$y=\frac{1}{2}at^2$ ⑦

a 与 mg 的夹角和 v 与 E 的夹角相同，均为 θ，又 $\tan\theta=\frac{y}{x}$ ⑧

联立④⑤⑥⑦⑧式，代入数据解得 $t=2\sqrt{3}$ s≈3.5 s. ⑨

解法 2：撤去磁场后，由于电场力垂直于竖直方向，它对竖直方向的分运动没有影响，以 P 点为坐标原点，竖直向上为正方向，小球在竖直方向上做匀减速运动，其初速度为

$v_y=v\sin\theta$ ⑤

若使小球再次经过 P 点所在的电场线，仅需小球的竖直方向上分位移为零，则有

$v_yt-\frac{1}{2}gt^2=0$ ⑥

联立④⑤⑥式，代入数据解得 $t=2\sqrt{3}\ \text{s}\approx3.5\ \text{s}$. ⑦

4. **解**：(1)设粒子在 p 板上做匀速直线运动的速度为 v_0，有 $h=v_0t$ ①

设发射装置对粒子做的功为 W，由动能定理得

$W=\frac{1}{2}mv_0^2$ ②

联立①②式可得 $W=\frac{mh^2}{2t^2}$. ③

(2)S 接"1"位置时，电源的电动势 E_0 与板间电势差 U 有

$E_0=U$ ④

板间产生匀强电场的场强为 E，粒子进入板间时有水平方向的速度 v_0，在板间受到竖直方向的重力和电场力作用而做类平抛运动，设加速度为 a，运动时间为 t_1，有

$U=Eh$ ⑤

$mg-qE=ma$ ⑥

$h=\frac{1}{2}at_1^2$ ⑦

$l=v_0t_1$ ⑧

S 接"2"位置，则在电阻 R 上流过的电流 I 满足

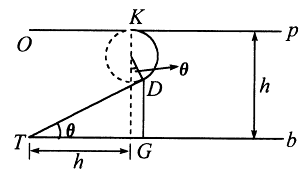
$I=\frac{E_0}{R+r}$ ⑨

联立①④～⑨式得

$I=\frac{mh}{q(R+r)}\left(g-\frac{2h^3}{l^2t^2}\right)$. ⑩

(3)由题意知此时在板间运动的粒子重力与电场力平衡，当粒子从 K 进入板间后立即进入磁场做匀速圆周运动，如图所示，粒子从 D 点出磁场区域后沿 DT 做匀速直线运动，DT 与 b 板上表面的夹角为题目所求夹角 θ，磁场的磁感应强度 B 取最大值时的夹角 θ 为最大值 θ_m，设粒子做匀速圆周运动的半径为 R，有

$qv_0B=\frac{mv_0^2}{R}$ ⑪



过 D 点作 b 板的垂线与 b 板的上表面交于 G，由几何关系有

$\overline{DG}=h-R(1+\cos\theta)$ ⑫

$\overline{TG}=h+R\sin\theta$ ⑬

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\overline{DG}}{\overline{TG}}$ ⑭

联立①⑪～⑭式，将 $B=B_m$ 代入，求得

$\theta_m=\arcsin\frac{2}{5}$

当 B 逐渐减小，粒子做匀速圆周运动的半径 R 也随之变大，D 点向 b 板靠近，DT 与 b 板上表面的夹角 θ 也越变越小，当 D 点无限接近于 b 板上表面时，粒子离开磁场后在板间几乎沿着 b 板上表面运动而从 T 孔飞出板间区域，此时 $B_m>B>0$ 满足题目要求，夹角 θ 趋近 θ_0，即 $\theta_0=0$

则题目所求夹角为

$0<\theta\leqslant\arcsin\frac{2}{5}$.

第十二讲　带电粒子运动对接高新科技

[**章节练习**]

1. **解**：(1)设离子经电场加速后进入磁场时的速度为 v，由动能定理得

$qU=\frac{1}{2}mv^2$ ①

离子在磁场中做匀速圆周运动，所受洛伦兹力提供向心力，即

$qvB=m\frac{v^2}{R}$ ②

由①②式解得

$U=\frac{qB^2R^2}{2m}$. ③

(2)设在 t 时间内收集到的离子个数为 N，总电荷量为 Q，则

$Q=It$ ④

$N=\frac{Q}{q}$ ⑤

$M=Nm$ ⑥

由④⑤⑥式解得

$M=\frac{mIt}{q}$. ⑦

(3)由①②式有

$R=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}$ ⑧

设 m' 为铀 238 离子在质量，由于加速电压的大小会在 $U\pm\Delta U$ 范围内有微小变化，铀 235 离子在磁场中最大半径为

$$R_{\max}=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m(U+\Delta U)}{q}} \quad ⑨$$

铀 238 离子在磁场中的最小半径为

$$R'_{\min}=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m'(U-\Delta U)}{q}} \quad ⑩$$

这两种离子在磁场中运动的轨迹不发生交叠的条件为

$$R_{\max}<R'_{\min} \quad ⑪$$

即 $\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m(U+\Delta U)}{q}}<\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m'(U-\Delta U)}{q}}$

则有 $m(U+\Delta U)<m'(U+\Delta U)$ ⑫

即 $\frac{\Delta U}{U}<\frac{m'-m}{m'+m}$ ⑬

其中铀 235 离子的质量 $m=235$ u(u 为原子质量单位)，铀 238 离子的质量

$m'=238$ u

故 $\frac{\Delta U}{U}<\frac{238\ \text{u}-235\ \text{u}}{238\ \text{u}+235\ \text{u}}$ ⑭

解得 $\frac{\Delta U}{U}<0.63\%$. ⑮

2.**解**：(1)设甲种离子在磁场中的运动半径为 r_1，在电场中加速时，有 $qU_0=\frac{1}{2}\times 2mv^2$

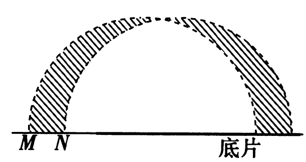
且 $qvB=2m\frac{v^2}{r_1}$

解得 $r_1=\frac{2}{B}\sqrt{\frac{mU_0}{q}}$

根据几何关系 $x=2r_1-L$

解得 $x=\frac{4}{B}\sqrt{\frac{mU_0}{q}}-L$.

(2)如图所示最窄处位于过两虚线交点的垂线上



$d=r_1-\sqrt{r_1^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2}$

解得 $d=\frac{2}{B}\sqrt{\frac{mU_0}{q}}-\sqrt{\frac{4mU_0}{qB^2}-\frac{L^2}{4}}$.

(3)设乙种离子在磁场中的运动半径为 r_2

r_1 的最小半径 $r_{1\min}=\frac{2}{B}\sqrt{\frac{m(U_0-\Delta U)}{q}}$

r_2 的最大半径 $r_{2\max}=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m(U_0+\Delta U)}{q}}$

由题意知 $2r_{1\min}-2r_{2\max}>L$

即 $\frac{4}{B}\sqrt{\frac{m(U_0-\Delta U)}{q}}-\frac{2}{B}\sqrt{\frac{2m(U_0+\Delta U)}{q}}>L$

解得 $L<\frac{2}{B}\sqrt{\frac{m}{q}}[2\sqrt{(U_0-\Delta U)}-\sqrt{2(U_0+\Delta U)}]$.

3. **解**:(1)设 A 经电场第 1 次加速后的速度为 v_1,由动能定理得 $qU=\frac{1}{2}mv_1^2-0$ ①

A 在磁场中做匀速圆周运动,所受洛伦兹力充当向心力

$qv_1B_1=\frac{mv_1^2}{R}$ ②

由①②式得 $B_1=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{2mU}{q}}$. ③

(2)设 A 经 n 次加速后的速度为 v_n,由动能定理得

$nqU=\frac{1}{2}mv_n^2-0$ ④

设 A 做第 n 次圆周运动的周期为 T_n,有 $T_n=\frac{2\pi R}{v_n}$ ⑤

设在 A 运动第 n 周的时间内电场力做功为 W_n,

则 $W_n=qU$ ⑥

在该段时间内电场力做功的平均功率为 $\overline{P}_n=\frac{W_n}{T_n}$ ⑦

由④⑤⑥⑦式解得 $\overline{P}_n=\frac{qU}{\pi R}\sqrt{\frac{nqU}{2m}}$.

(3)A 图能定性地反映 A、B 运动的轨迹.

A 经过 n 次加速后,设其对应的磁感应强度为 B_n,A、B 的周期分别为 T_n、T',综合②⑤式并分别应用 A、B 的数据得 $T_n=\frac{2\pi m}{qB_n}$

$T'=\frac{2\pi m}{kqB_n}=\frac{T_n}{k}$

由上式可知,T_n 是 T' 的 k 倍,所以 A 每绕行 1 周,B 就绕行 k 周. 由于电场只在 A 通过时存在,故 B 仅在与 A 同时进入电场时才被加速.

经 n 次加速后,A、B 的速度分别为 v_n 和 v_n',考虑到④式

$v_n=\sqrt{\frac{2nqU}{m}}$

$v_n'=\sqrt{\frac{2nkqU}{m}}=\sqrt{k}v_n$

由题设条件并考虑到⑤式，对 A 有 $T_n v_n=2\pi R$

设 B 的轨迹半径为 R'，有 $T'v_n'=2\pi R'$

比较上述两式得 $R'=\frac{R}{\sqrt{k}}$

上式表明，运动过程中 B 的轨迹半径始终不变.

由以上分析可知，两粒子运动的轨迹如图 A 所示.

4. **解**：(1)离子经一次加速的速度为 v_0，由动能定理得

$qU=\frac{1}{2}mv_0^2$ ①

离子的轨道半径为 R_0，则 $R_0=\frac{1}{2}kd$ ②

由洛伦兹力提供向心力，$qv_0B=m\frac{v_0^2}{R_0}$ ③

联立①②③式得 $B=\frac{2\sqrt{2Uqm}}{qkd}$.

(2)设离子在电场中经过 n 次加速后到达 P 点，根据动能定理和牛顿第二定律得

$nqU=\frac{1}{2}mv_n^2$ ④

$qv_nB=m\frac{v_n^2}{r_n}$ ⑤

$r_n=\frac{kd}{2}$ ⑥

联立④⑤⑥式解得 $v_n=\sqrt{\frac{2nqU}{m}}$，$B=\frac{2\sqrt{2nUqm}}{qkd}$

当离子经过第一次加速，在磁场中偏转时

$qU=\frac{1}{2}mv_1{}^2$ ⑦

$qv_1B=m\frac{v_1{}^2}{r_1}$ ⑧

联立④⑤⑥⑦⑧式解得 $r_1=\frac{kd}{2\sqrt{n}}$

由于 $\frac{d}{2}<r_1\leqslant\frac{kd}{2}$，解得 $1\leqslant n<k^2$，且 n 为整数，所以 $n=1,2,3,\cdots,k^2-1$

磁感应强度的可能值为 $B=\frac{2\sqrt{2nUqm}}{qkd}(n=1,2,3,\cdots,k^2-1)$.

(3)当离子在电场中加速 (k^2-1) 次时，离子打在 P 点的能量最大

此时磁感应强度 $B=\frac{2\sqrt{2(k^2-1)Uqm}}{qkd}$

最终速度 $v_n=\sqrt{\frac{2(k^2-1)qU}{m}}$

离子在磁场中做匀速圆周运动的周期

$$T=\frac{2\pi m}{qB}=\frac{\pi mkd}{\sqrt{2(k^2-1)Uqm}}$$

离子在磁场中运动的时间

$$t_1=\frac{2(k^2-1)-1}{2}T=\frac{(2k^2-3)\pi mkd}{2\sqrt{2Uqm(k^2-1)}}$$

根据牛顿第二定律，离子在电场中运动的加速度

$$a=\frac{qE}{m}=\frac{qU}{mh}$$

离子在电场中运动的全过程等效为初速度为0的匀加速直线运动，根据速度公式 $v_n=at_2$，得离子在电场中的运动时间 $t_2=\frac{v_n}{a}=h\sqrt{\frac{2(k^2-1)m}{Uq}}$.

第十三讲 “发电类”模型问题

［章节练习］

1. **解**：(1)小球运动时不受细管侧壁的作用力，因而小球所受洛伦兹力提供向心力

$$qv_0B_0=m\frac{v_0^2}{r} \quad ①$$

由①式解得 $v_0=\frac{qB_0r}{m}$. ②

(2)①在 T_0 到 $1.5T_0$ 这段时间内，细管内一周的感应电动势

$$E_{感}=\pi r^2\frac{\Delta B}{\Delta t} \quad ③$$

由题图乙可知 $\frac{\Delta B}{\Delta t}=\frac{2B_0}{T_0}$ ④

由于同一条电场线上各点的场强大小相等，所以

$$E=\frac{E_{感}}{2\pi r} \quad ⑤$$

由③④⑤式及 $T_0=\frac{2\pi m}{qB_0}$ 得 $E=\frac{qB_0^2r}{2\pi m}$. ⑥

②在 T_0 到 $1.5T_0$ 时间内，小球沿切线方向的加速度大小恒为

$$a=\frac{qE}{m} \quad ⑦$$

小球运动的末速度大小

$$v=v_0+a\Delta t \quad ⑧$$

由题图乙知 $\Delta t=0.5T_0$，并由②⑥⑦⑧式得 $v=\frac{3}{2}v_0=\frac{3qB_0r}{2m}$ ⑨

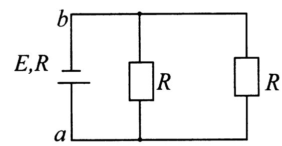
由动能定理，电场力做功为

$W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$ ⑩

由②⑨⑩式解得

$W=\frac{5}{8}mv_0^2=\frac{5q^2B_0^2r^2}{8m}$.

2. **解**：(1)杆 ab 切割磁感线 B_1 时，等效电路如图所示.



感应电动势 $E=B_1lv_0$

电流 $I=\frac{E}{1.5R}$

安培力 $F=B_1Il$

匀速运动条件为$\frac{B_1^2l^2v_0}{1.5R}=mg\sin\theta$

解得 $v_0=\frac{1.5mgR\sin\theta}{B_1^2l^2}=6\ \text{m/s}$.

(2) 杆 ab 与“联动双杆”发生碰撞，由动量守恒定律得 $mv_0=4mv$

解得 $v=\frac{v_0}{4}=1.5\ \text{m/s}$.

(3)进入磁场区间Ⅱ，设速度变化 Δv，经历时间为 Δt，由动量定理

有 $\bar{I}B_2l\Delta t=-4m\Delta v$

$\bar{I}\Delta t=\Delta q=\frac{B_2lL}{1.5R}$

解得 $\Delta v=\frac{-B_2^2l^2L}{1.5R\times 4m}=-0.25\ \text{m/s}$

出磁场区间Ⅱ，同样有 $\Delta v=-\frac{B_2^2l^2L}{1.5R\times 4m}=-0.25\ \text{m/s}$

出磁场区间Ⅱ后“联动三杆”的速度为 $v'=v+2\Delta v=1.0\ \text{m/s}$

产生的焦耳热 $Q=\frac{1}{2}\times 4m(v^2-v'^2)=0.25\ \text{J}$.

3. **解**：(1)根据右手定则，得导体棒 AB 上的电流方向为 $B\to A$，故电阻 R 上的电流方向为 $C\to D$.

设导体棒 AB 中点的速度为 v，则 $v=\frac{v_A+v_B}{2}$

而 $v_A=\omega r$，$v_B=2\omega r$

根据法拉第电磁感应定律，导体棒 AB 上产生的感应电动势 $E=Brv$

根据闭合电路欧姆定律得 $I=\frac{E}{R}$

联立以上各式解得通过电阻 R 的感应电流的大小为 $I=\frac{3B\omega r^2}{2R}$.

(2)根据能量守恒定律,外力的功率 P 等于安培力与摩擦力的功率之和

即 $P=BIrv+fv$,而 $f=\mu mg$

解得 $P=\dfrac{9B^2\omega^2r^4}{4R}+\dfrac{3\mu mg\omega r}{2}$.

4. **解**:(1)方框质量 $m=4LAd$,方框电阻 $R=\rho\dfrac{4L}{A}$

方框下落速度为 v 时,产生的感应电动势 $E=B\cdot 2L\cdot v$

感应电流 $I=\dfrac{E}{R}=\dfrac{BAv}{2\rho}$

方框下落过程,受到重力 G 及安培力 F

$G=mg=4LAdg$,方向竖直向下

$F=BI\cdot 2L=\dfrac{B^2AL}{\rho}v$,方向竖直向上

当 $F=G$ 时,方框达到最大速度,

即 $v=v_{\mathrm{m}}$,则 $\dfrac{B^2AL}{\rho}v_{\mathrm{m}}=4LAdg$

方框下落的最大速度 $v_{\mathrm{m}}=\dfrac{4\rho dg}{B^2}$.

(2)方框下落加速度为 $\dfrac{g}{2}$ 时,有 $mg-IB\cdot 2L=m\dfrac{g}{2}$,

则 $I=\dfrac{mg}{4BL}=\dfrac{Adg}{B}$

方框的发热功率 $P=I^2R=\dfrac{4\rho ALd^2g^2}{B^2}$.

(3)根据能量守恒定律,有 $mgh=\dfrac{1}{2}mv_t^2+I_0^2Rt$

$I_0=\sqrt{\dfrac{m}{Rt}(gh-\dfrac{1}{2}v_t^2)}$

解得恒定电流 I_0 的表达式 $I_0=A\sqrt{\dfrac{d}{\rho t}(gh-\dfrac{1}{2}v_t^2)}$.

第十四讲 “电动类”模型问题

[章节练习]

1. **解**:炮弹的加速度为:$a=\dfrac{F}{m}=\dfrac{BIW}{m}$

炮弹做匀加速运动,有:$v^2=2aL$

解得:$I=\dfrac{mv^2}{2BWL}=6\times10^5$ A.

2. **解**：(1)由匀加速运动公式 $a=\frac{v^2}{2s}=9\times10^5\ \text{m/s}^2$

由安培力公式和牛顿第二定律，有 $F=BIl=kI^2l$，即 $kI^2l=ma$

因此 $I=\sqrt{\frac{ma}{kl}}=8.5\times10^5$ A.

(2)滑块获得的动能是电源输出能量的 4%，即 $P\Delta t\times4\%=\frac{1}{2}mv^2$

发射过程中电源供电时间 $\Delta t=\frac{v}{a}=\frac{1}{3}\times10^{-2}$ s

所需的电源输出功率为 $P=\frac{\frac{1}{2}mv^2}{\Delta t\times4\%}=1.0\times10^9$ W

由功率 $P=IU$，解得输出电压 $U=\frac{P}{I}=1.2\times10^3$ V.

(3)分别对砂箱和滑块用动能定理，有

$f_{sM}=\frac{1}{2}Mv'$

$f'_{sm}=\frac{1}{2}mv'-\frac{1}{2}mv^2$

由牛顿定律 $f=-f'$ 和相对运动 $s_m=s_M+s'$

由动量守恒 $mv=(m+M)v'$

联立求得 $fs'=\frac{M}{m+M}\cdot\frac{1}{2}mv^2$

故平均冲击力 $f=\frac{M}{2(m+M)}\cdot\frac{v^2}{s'}$.

3. **解**：(1)根据安培力公式，推力 $F_1=I_1Bb$，其中 $I_1=\frac{U}{R}$，$R=\rho\frac{b}{ac}$

则 $F_1=\frac{U}{R}Bb=\frac{Uac}{\rho}B=796.8$ N，对海水推力的方向沿 y 轴正方向(向右)；

(2)$U_{感}=Bv_db=9.6$ V.

(3)根据欧姆定律，$I_2=\frac{U'}{R}=\frac{(U-Bv_db)ac}{\rho b}=600$ A

安培推力 $F_2=I_2Bb=720$ N

对船的推力 $F=80\%F_2=576$ N

推力的功率 $P=Fv_s=80\%F_2v_s=2\ 880$ W.

4. **解**：(1)由电磁感应定律 $E=n\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$

得 $E=nS\frac{\Delta B_2}{\Delta t}=30$ V.

(2)电流方向 $C\to D$,B_2 方向向上.

(3)由牛顿第二定律有 $F=ma=m\dfrac{v-0}{\Delta t}$

安培力 $F=IB_1l$

$\Delta Q=I\Delta t$

$v^2=2gh$

得 $\Delta Q=\dfrac{m\sqrt{2gh}}{B_1l}=0.03$ C.

第十五讲 “双电源”电路模型问题

[章节练习]

1.**解**:以 a 表示金属杆运动的加速度,在 t 时刻,金属杆与初始位置的距离 $L=\dfrac{1}{2}at^2$

此时杆的速度 $v=at$

这时,杆与导轨构成的回路的面积 $S=Ll$

回路中既有切割产生的电动势 $E_1=Blv$

又有磁变产生的电动势 $E_2=S\dfrac{\Delta B}{\Delta t}$

而 $B=kt$

$\dfrac{\Delta B}{\Delta t}=\dfrac{B(t+\Delta t)-Bt}{\Delta t}=k$

根据楞次定律,可知 E_1 与 E_2 的方向相同,所以回路总感应电动势 $E=E_1+E_2$

回路的总电阻 $R=2Lr_0$

回路中的感应电流 $I=\dfrac{E}{R}$

作用于杆的安培力 $F=BIl$

联立解得 $F=\dfrac{3k^2l^2}{2r_0}t$

代入数据,可得 $F=1.44\times10^{-3}$ N.

2.**解**:(1)感应电流的大小和方向均不发生改变.因为金属棒滑到圆弧任意位置时,回路中磁通量的变化率相同.

(2)$0\sim t_0$ 时间内,设回路中感应电动势大小为 E_0,感应电流为 I,感应电流产生的焦耳热为 Q,由法拉第电磁感应定律:$E_0=\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}=L^2\dfrac{B_0}{t_0}$

根据闭合电路欧姆定律:$I=\dfrac{E_0}{R}$

联立且由焦耳定律有:$Q=I^2Rt=\dfrac{L^4B_0^2}{t_0R}$.

(3)设金属进入磁场 B_0 一瞬间的速度为 v,金属棒在圆弧区域下滑的过程中,机械能守恒:$mgH=\frac{1}{2}mv^2$

在很短的时间 Δt 内,根据法拉第电磁感应定律,金属棒进入磁场 B_0 区域瞬间的感应电动势为 E,则:

$E=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$

$\Delta\Phi=B_0L\Delta x+L^2\Delta B(t)$

由闭合电路欧姆定律得:$I=\frac{E}{R}$

联立解得感应电流:$I=\frac{B_0L}{R}(\sqrt{2gH}-\frac{L}{t_0})$

根据上式讨论:

Ⅰ.当 $\sqrt{2gH}=\frac{L}{t_0}$ 时,$I=0$;

Ⅱ.当 $\sqrt{2gH}>\frac{L}{t_0}$ 时,$I=\frac{B_0L}{R}(\sqrt{2gH}-\frac{L}{t_0})$,方向为 $b\to a$;

Ⅲ.当 $\sqrt{2gH}<\frac{L}{t_0}$ 时,$I=\frac{B_0L}{R}(\frac{L}{t_0}-\sqrt{2gH})$,方向为 $a\to b$.

3.**解**:(1)设磁场的磁感应强度大小为 B,cd 边刚进入磁场时,线框做匀速运动的速度为 v_1,cd 边上的感应电动势为 E_1,由法拉第电磁感应定律,有

$E_1=2Blv_1$ ①

设线框总电阻为 R,此时线框中电流为 I_1,由闭合电路欧姆定律,有

$I_1=\frac{E_1}{R}$ ②

设此时线框所受安培力为 F_1,有

$F_1=2I_1lB$ ③

由于线框做匀速运动,其受力平衡,有

$mg=F_1$ ④

由①②③④式得

$v_1=\frac{mgR}{4B^2l^2}$ ⑤

设 ab 边离开磁场之前,线框做匀速运动的速度为 v_2,同理可得

$v_2=\frac{mgR}{B^2l^2}$ ⑥

由⑤⑥式得

$v_2=4v_1$. ⑦

(2)线框自释放直到 cd 边进入磁场前,由机械能守恒定律,有

$2mgl=\frac{1}{2}mv_1^2$ ⑧

线框完全穿过磁场的过程中,由能量守恒定律,有

$mg(2l+H)=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2+Q$ ⑨

由⑦⑧⑨式得

$H=\frac{Q}{mg}+28l$.

4.**解**:(1)感应电流 $I=\frac{Blv_y}{R}$

由受力平衡得 $mg=BIl$

进入时 y 方向的速度:$v_y=2\ \text{m/s}$,$B=2\ \text{T}$.

(2)根据动量定理:$-Bl\Delta q=mv-mv_0$,解得 $\Delta q=\frac{Bl^2}{R}$

全过程能量守恒:$Q=mgl+\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}mv^2$,解得 $Q=0.0375\ \text{J}$.

(3)进入磁场前:$x\leqslant 0.4\ \text{m}$,$U_{ab}=0$

进入磁场过程:$0.4\ \text{m}<x\leqslant 0.5\ \text{m}$,$U_{ab}=Bv_yv_0t-I\frac{R}{4}=(4x-1.7)\ \text{V}$

在磁场中:$0.5\ \text{m}<x\leqslant 0.6\ \text{m}$,$U_{ab}=Bv_0l=0.4\ \text{V}$

出磁场过程:$0.6<x\leqslant 0.7\ \text{m}$,$v_x=v_0-\frac{Bl\Delta q}{m}=5(1-x)\ \text{m/s}$

$U_{ab}=\frac{Bv_xl}{R}\times\frac{R}{4}=\frac{1-x}{4}\ \text{V}$.

第十六讲　电磁感应现象对接高新科技

[**章节练习**]

1.**解**:(1)由右手定则知:感应电流从 C 端流出.

(2)设线圈受到的安培力为 F_A.外加电流从 D 端流入.

由 $F_A=mg$ 和 $F_A=2nBIL$,得 $m=\frac{2nBL}{g}I$.

(3)设能称量的最大质量为 m_0.

由 $m=\frac{2nBL}{g}I$ 和 $P=I^2R$,得 $m_0=\frac{2nBL}{g}\sqrt{\frac{P}{R}}$.

2.**解**:(1)磁铁在铝条间运动时,两根铝条受到的安培力大小相等,均为 $F_{安}$,有

$F_{安}=IdB$ ①

设磁铁受到沿斜面向上的作用力为 F,其大小为 $F=2F_{安}$ ②

磁铁匀速运动时受力平衡,则有

$F-mg\sin\theta=0$ ③

联立①②③式可得

$I=\frac{mg\sin\theta}{2Bd}$. ④

(2)磁铁在铝条间运动时,在铝条中产生的感应电动势为

$E=Bdv$ ⑤

设铝条与磁铁正对部分的电阻为 R,由电阻定律有

$R=\rho\frac{d}{db}$ ⑥

由欧姆定律有

$I=\frac{E}{R}$ ⑦

联立④⑤⑥⑦式可得

$v=\frac{\rho mg\sin\theta}{2B^2d^2b}$. ⑧

(3)磁铁以速度 v 进入铝条间,恰好做匀速运动时,磁铁受到沿斜面向上的作用力 F,联立①②⑤⑥⑦式

可得 $F=\frac{2B^2d^2bv}{\rho}$ ⑨

当铝条的宽度 $b'>b$ 时,磁铁以速度 v 进入铝条间时,磁铁受到的作用力变为 F',有

$F'=\frac{2B^2d^2b'v}{\rho}$ ⑩

可见,$F'>F=mg\sin\theta$,磁铁所受到的合力方向沿斜面向上,获得与运动方向相反的加速度,磁铁将减速下滑,此时加速度最大.之后,随着运动速度减小,F'也随着减小,磁铁所受的合力也减小,由于磁铁加速度与所受到的合力成正比,磁铁的加速度逐渐减小,综上所述,磁铁做加速度逐渐减小的减速运动,直到 $F'=mg\sin\theta$ 时,磁铁重新达到平衡状态,以较小的速度匀速下滑.

3.**解**:(1)$U_H=E_Hl$　c 端电势高

(2)由 $U_H=R_H\frac{IB}{d}$ ①

得:$R_H=U_H\frac{d}{IB}=E_Hl\frac{d}{IB}$ ②

当电场力与洛伦兹力相等时 $eE_H=evB$

得:$E_H=vB$ ③

又 $I=nevS$ ④

将③、④代入②得：$R_H=vBl\frac{d}{IB}=vl\frac{d}{nevS}=\frac{ld}{neS}=\frac{1}{ne}$.

(3)a. 由于在时间 t 内，霍尔元件输出的脉冲数目为 P，则 $P=mNt$

圆盘转速为 $N=\frac{P}{mt}$；

b. 略(提出的实例或设想合理即可).

4. **解**：(1)逆时针方向.

撤去磁场瞬间，环所围面积的磁通量突变为零，由楞次定律可知，环中电流的磁场方向应与原磁场方向相同，即向上. 由右手螺旋定则可知，环中电流的方向沿逆时针方向.

(2)设圆环周长为 l、电阻为 R，由电阻定律得

$R=\rho\frac{l}{S}$ ①

设 t 时间内环中电流释放焦耳热而损失的能量为 ΔE，由焦耳定律得

$\Delta E=I^2Rt$ ②

设环中单位体积内定向移动电子数为 n，则

$I=nevS$ ③

式中 n、e、S 不变，只有定向移动电子的平均速率的变化才会引起环中电流的变化. 电流变化大小取 ΔI 时，相应定向移动电子的平均速率变化的大小为 Δv，则

$\Delta I=neS\Delta v$ ④

设环中定向移动电子减少的动能总和为 ΔE_k，则

$\Delta E_k=nlS[\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}m(v-\Delta v)^2]$ ⑤

由于 $\Delta I\ll I$，可得

$\Delta E_k=\frac{lmv}{e}\Delta I$ ⑥

根据能量守恒定律，得

$\Delta E=\Delta E_k$ ⑦

联立上述各式，得

$\rho=\frac{mvS\Delta I}{etI^2}$. ⑧

(3)由 $\rho=\frac{mvS\Delta I}{etI^2}$看出，在题设条件限制下，适当增大超导电流，可以使实验获得 ρ 的准确程度更高，通过增大穿过该环的磁通量变化率可以实现增大超导电流.

获取更多初高中教辅电子书资源，咨询微信：13352881947